

## THÉORÈMES DE BOREL AVEC CONTRAINTES

D. CERVEAU AND D. GARBA BELKO

RÉSUMÉ. Un théorème classique de Borel affirme que chaque série formelle à coefficients réels est le jet Taylorien d'un germe de fonction  $\mathcal{C}^\infty$ . Nous étudions ce type de problème en particulier pour des algèbres de Lie de champs de vecteurs ou des groupes de difféomorphismes.

A classical theorem due to Borel asserts that any formal series with real coefficients is the Taylor expansion of a germ of a  $\mathcal{C}^\infty$ -function. We study such a problem in the context of Lie algebras of vector fields or of groups of diffeomorphisms.

### INTRODUCTION

Soient  $\mathcal{E}_n$  l'anneau des germes de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à l'origine  $\underline{0}$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $\hat{\mathcal{E}}_n$  celui des séries formelles en  $n$  indéterminées et à coefficients réels. L'application :

$$T_{\underline{0}} : \mathcal{E}_n \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_n$$

qui à une fonction  $f$  associe son jet de Taylor infini est un morphisme d'anneau. Le théorème de réalisation de Borel affirme que  $T_{\underline{0}}$  est surjectif : si  $\hat{f} \in \hat{\mathcal{E}}_n$  est une série formelle, il existe un germe de fonction  $f \in \mathcal{E}_n$  tel que  $T_{\underline{0}}f = \hat{f}$ . Un tel  $f$  sera dit une réalisation  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\hat{f}$ . Deux réalisations de  $\hat{f}$  diffèrent par une fonction plate en  $\underline{0}$ . Si l'on note  $\mathfrak{M}_n \subset \mathcal{E}_n$  l'idéal maximal constitué des germes s'annulant au point  $\underline{0}$ , alors le noyau de  $T_{\underline{0}}$  est exactement l'idéal des fonctions plates  $\text{Ker}T_{\underline{0}} = \mathfrak{M}_n^\infty = \bigcap_k \mathfrak{M}_n^k$ . L'application  $T_{\underline{0}}$  s'étend naturellement aux  $\mathcal{E}_n$ -modules "classiques". Si  $\Omega_n^k$  désigne le  $\mathcal{E}_n$ -module des germes de  $k$ -formes différentielles et  $\hat{\Omega}_n^k$  le  $\hat{\mathcal{E}}_n$ -module des  $k$ -formes formelles on désignera encore  $T_{\underline{0}} : \Omega_n^k \rightarrow \hat{\Omega}_n^k$  le morphisme qui à une  $k$ -forme  $\mathcal{C}^\infty$  associe son jet Taylorien infini en l'origine. De même si  $\mathcal{X}_n$  (resp.  $\hat{\mathcal{X}}_n$ ) désigne l'algèbre de Lie des germes de champs de vecteurs  $\mathcal{C}^\infty$  (resp. formels) et  $\text{Diff}(\mathbb{R}_{\underline{0}}^n)$  (resp.  $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_{\underline{0}}^n)$ ) celui des germes de difféomorphisme  $\mathcal{C}^\infty$  (resp. formels), en  $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$ , on dispose encore de morphismes de jets Tayloriens  $T_{\underline{0}} : \mathcal{X}_n \rightarrow \hat{\mathcal{X}}_n$  et  $T_{\underline{0}} : \text{Diff}(\mathbb{R}_{\underline{0}}^n) \rightarrow \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_{\underline{0}}^n)$ . Dans le premier cas c'est un morphisme d'algèbre de Lie et dans le second un morphisme de groupe. Le théorème de Borel s'implante brutalement sur ces espaces, i.e. tout élément de  $\hat{\Omega}_n^k$ ,  $\hat{\mathcal{X}}_n$  ou  $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_{\underline{0}}^n)$  possède une réalisation  $\mathcal{C}^\infty$  dans les espaces correspondants. Mais ces espaces possèdent des structures supplémentaires, produit extérieur et opérateur  $d$  pour les  $\Omega_n^k$ , crochet de Lie pour les champs de vecteurs et composition pour les difféomorphismes. Se posent alors les problèmes de réalisation de type Borel tenant compte de ces structures. Ce que nous appelons le théorème de Borel avec contraintes. En voici quelques exemples :

- (1) Etant donné,  $\hat{G} \subset \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_{\underline{0}}^n)$ , un sous groupe de type fini de difféomorphismes formels, existe-t-il une réalisation  $G \subset \text{Diff}(\mathbb{R}_{\underline{0}}^n)$  telle que la restriction  $T_{\underline{0}} : G \rightarrow \hat{G}$  soit un isomorphisme de groupe ?
- (2) Soit  $\hat{\mathcal{G}} \subset \hat{\mathcal{X}}_n$  une sous algèbre de Lie de champs de vecteurs formels de dimension finie. Existe-t-il une réalisation  $\mathcal{G} \subset \mathcal{X}_n$  telle que la restriction  $T_{\underline{0}} : \mathcal{G} \rightarrow \hat{\mathcal{G}}$  soit un isomorphisme d'algèbre de Lie ?

- (3) Soit  $\hat{\omega}$  une 1-forme intégrable formelle non triviale. Peut-on cette fois trouver une réalisation  $\omega \in \Omega_n^1$  de  $\hat{\omega}$  qui soit intégrable, i.e.  $d\omega \wedge \omega = 0$ ? Un problème analogue se pose pour les systèmes de Pfaff.

Les problèmes de type Borel ont intéressé de nombreux mathématiciens. C'est ainsi que dans le cadre de l'étude des algèbres quasi-analytiques J. C. Tougeron [22] montre que le morphisme  $T_0 : \mathcal{E}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_1$  possède des sections. Toutefois ces sections ne respectent pas la composition. En dimension 2, où la condition d'intégrabilité est triviale, R. Roussarie [18] a donné plusieurs résultats de type Borel.

Sans résoudre, en toute généralité, les problèmes énumérés ci-dessus nous apportons des réponses positives dans quelques cas particuliers. Ces réponses sont parfois des adaptations de résultats relativement classiques (détermination finie par exemple) ou nécessitant des techniques spécifiques.

Nous remercions P. Sad et le referee pour des remarques et suggestions pertinentes.

## 1. ALGÈBRES DE LIE DE CHAMPS DE VECTEURS

**1.1. Algèbres semi-simples, algèbres de rang ponctuel 1, algèbres saturables.** Soient  $\hat{\mathcal{L}}$  une sous algèbre de Lie de  $\hat{\mathcal{X}}_n$  et  $\hat{\mathcal{L}}(0) = \{\hat{X}(0)/\hat{X} \in \hat{\mathcal{L}}\}$  l'évaluation de  $\hat{\mathcal{L}}$  en  $0$ . Nous nous intéressons au cas purement singulier où  $\hat{\mathcal{L}}(0) = \{0\}$ . Sous cette hypothèse l'ensemble  $\mathcal{L}^1 = \{J^1 X/X \in \hat{\mathcal{L}}\}$  "des parties linéaires" des éléments de  $\hat{\mathcal{L}}$  est une sous algèbre de Lie de l'algèbre de Lie  $\mathcal{X}_n^1$  des champs de vecteurs linéaires de  $\mathbb{R}^n$ . Notons que  $\mathcal{X}_n^1$  est isomorphe à l'espace vectoriel des endomorphismes,  $\text{End}\mathbb{R}^n$ , de  $\mathbb{R}^n$ .

Supposons que  $\hat{\mathcal{L}}$  soit semi-simple, i.e.  $\hat{\mathcal{L}}$  n'admet pas d'idéal résoluble non nul. D'après un résultat de R. Hermann [9]  $J^1 : \hat{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{L}^1$  est injectif et  $\hat{\mathcal{L}}$  est formellement linéarisable. Ceci signifie qu'il existe  $\hat{\Phi} \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0^n)$  qui conjugue  $\hat{\mathcal{L}}$  à  $\mathcal{L}^1$  :

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\Phi}_* \mathcal{L}^1 = \{\hat{\Phi}_*(J^1 X)/X \in \hat{\mathcal{L}}\}.$$

Soit  $\Phi$  une réalisation  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\hat{\Phi}$ ; l'algèbre de Lie  $\mathcal{L} = \Phi_* \mathcal{L}^1$  est une réalisation de  $\hat{\mathcal{L}}$  et par construction  $T_0 : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  est un isomorphisme. D'où le :

**Théorème 1.** *Soit  $\hat{\mathcal{L}} \subset \mathfrak{M}_n \hat{\mathcal{X}}_n$  une algèbre de Lie semi-simple de champs de vecteurs formels. Alors  $\hat{\mathcal{L}}$  possède une réalisation  $\mathcal{C}^\infty$  notée  $\mathcal{L}$  telle que  $T_0 : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  soit un isomorphisme.*

Comme ci-dessus toutes les algèbres de Lie linéarisables de champs formels possèdent une réalisation  $\mathcal{C}^\infty$ ; de même celles qui sont conjuguées à une algèbre de champs polynomiaux. C'est le cas en petite dimension  $n$  d'espace. En dimension  $n = 1$ , la classification formelle des sous algèbres  $\hat{\mathcal{L}}$  de dimension finie de  $\hat{\mathcal{X}}_1$  se trouve dans [7]. Elle est probablement connue de S. Lie, F. Klein et E. Cartan.

- (1)  $n = 1$  et  $\dim \hat{\mathcal{L}} = 1$ ;  $\hat{\mathcal{L}}$  est formellement conjuguée à l'algèbre engendrée par l'un des champs  $\frac{\partial}{\partial x}$  et  $X_{p,\lambda} = \frac{x^{p+1}}{1-\lambda x^p} \frac{\partial}{\partial x}$  avec  $p \in \mathbb{N}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- (2)  $n = 1$  et  $\dim \hat{\mathcal{L}} = 2$ ;  $\hat{\mathcal{L}}$  est formellement conjuguée à l'une des algèbres  $\langle \frac{\partial}{\partial x}, x \frac{\partial}{\partial x} \rangle$  et  $\langle x \frac{\partial}{\partial x}, x^p \frac{\partial}{\partial x} \rangle$  avec  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Toutes ces algèbres sont isomorphes à l'algèbre du groupe des transformations affines de la droite.
- (3)  $n = 1$  et  $\dim \hat{\mathcal{L}} = 3$ ;  $\hat{\mathcal{L}}$  est formellement conjuguée à l'algèbre  $\langle \frac{\partial}{\partial x}, x \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial x} \rangle$  qui est l'algèbre du groupe des transformations homographiques  $\mathbb{P}GL(2, \mathbb{R})$ .

Toutes ces algèbres  $\hat{\mathcal{L}}$  sont formellement conjuguées à des algèbres de champs analytiques  $\mathcal{L}^{an}$ . Le théorème de Borel usuel, appliqué à une conjuguante  $\hat{\Phi}$  ( $\hat{\mathcal{L}} = \hat{\Phi}_* \mathcal{L}^{an}$ ) produit une

réalisation  $\mathcal{L} = \Phi_* \mathcal{L}^{an}$  des  $\hat{\mathcal{L}}$  considérées. En dimension plus grande la classification des algèbres de champs formels n'est pas connue. En dimension deux on peut faire la liste de celles qui sont formellement linéarisables (pour lesquelles on aura donc des énoncés de type Borel). Ceci met en jeu des conditions de non résonance, à la Poincaré, portant sur leur radical résoluble. En un certain sens cette liste de type "zoologique" ne met à jour ni des techniques nouvelles, ni des résultats nouveaux. Pour illustrer ce qui précède nous allons traiter quelques cas spéciaux en dimension 2 (d'espace); en particulier celui des algèbres commutatives. Nous avons pour cela besoin de la notion de rang ponctuel générique ( $\nabla(\hat{\mathcal{L}})$ ) que nous définissons pour n'importe quelle algèbre  $\hat{\mathcal{L}}$  de  $\hat{\mathcal{X}}_n$ .

**Définition 2.** Soit  $\hat{\mathcal{L}} \subset \hat{\mathcal{X}}_n$  une sous algèbre non nulle; le rang ponctuel générique (ou plus simplement le rang)  $\nabla(\hat{\mathcal{L}})$  est le nombre maximal  $k$  d'éléments,  $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_k$  de  $\hat{\mathcal{L}}$ , qui sont  $\hat{\mathcal{E}}_n$ -indépendants. Si  $\hat{X}_j = \sum \hat{a}_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $\hat{a}_{i,j} \in \hat{\mathcal{E}}_n$ ,  $j = 1, \dots, \nabla(\hat{\mathcal{L}})$ , la matrice  $(\hat{a}_{i,j})$  possède un mineur  $\nabla(\hat{\mathcal{L}}) \times \nabla(\hat{\mathcal{L}})$  de déterminant non nul.

Le rang ponctuel générique est trivialement majoré par la dimension ambiante. Par exemple l'algèbre  $\hat{\mathcal{L}} = \{\hat{f}(x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} / \hat{f} \in \hat{\mathcal{E}}_1\}$  est une sous algèbre de Lie de  $\hat{\mathcal{E}}_2$  de dimension infinie et de rang 1. Notons que  $\hat{\mathcal{L}}$  est commutative et que le théorème de Borel, appliqué aux  $\hat{f}$ , donne une réalisation  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\hat{\mathcal{L}}$ . L'algèbre  $\mathcal{L} = \{f(x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} / f \in \mathcal{E}_1\}$  est commutative et se projette sur  $\hat{\mathcal{L}}$  ( $T_0 \mathcal{L} = \hat{\mathcal{L}}$ ), mais  $T_0 : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  n'est pas un isomorphisme puisque si  $P \in \mathcal{E}_1$  est une fonction plate, alors  $T_0((P(x_2)) \frac{\partial}{\partial x_1}) = 0$ . En fait choisissons une  $\mathbb{R}$ -base  $\{\hat{a}_i, i \in I\}$  du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\hat{\mathcal{E}}_1$  et soient  $a_i \in \mathcal{E}_1$ ,  $i \in I$ , des réalisations de Borel des  $\hat{a}_i$ . Alors le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{E}'$  engendré par les  $a_i$  produit une réalisation  $\mathcal{L}' = \{f(x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} / i \in I\}$  pour laquelle  $T_0 : \mathcal{L}' \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  est un isomorphisme.

**1.2. Description des sous algèbres  $\hat{\mathcal{L}} \subset \hat{\mathcal{X}}_n$  de dimension finie et de rang 1.** Soient  $\hat{X}$  un champ formel et  $E \subset \hat{\mathcal{E}}_n$  un sous espace vectoriel ayant la propriété suivante :

$$\forall(\hat{f}, \hat{g}) \in E \times E, \hat{f}\hat{X}(\hat{g}) - \hat{g}\hat{X}(\hat{f}) \in E \quad (*)$$

où  $\hat{f} \mapsto \hat{X}(\hat{f})$  est la dérivation associée à  $\hat{X}$ . Alors l'algèbre  $\hat{\mathcal{L}} = E.\hat{X} = \{\hat{f}\hat{X}/\hat{f} \in E\}$  est de rang 1 et de dimension celle de  $E$ . En fait toute sous algèbre de Lie  $\hat{\mathcal{L}}$  de rang 1 s'obtient ainsi. En effet si  $\hat{Y} = \sum \hat{a}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $\hat{a}_i \in \hat{\mathcal{E}}_n$  est un élément non nul, alors le champ  $\hat{X} = \frac{\hat{Y}}{\text{pgcd}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n)}$  convient. A noter que le champ  $\hat{X}$  n'appartient peut être pas à  $\hat{\mathcal{L}}$ .

L'algèbre  $\hat{\mathcal{L}}$  de rang 1 sera dite *saturable* s'il existe

$$\hat{X} = \sum \hat{a}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \hat{\mathcal{L}}$$

satisfaisant  $\text{pgcd}(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n) = 1$ . Dans ce cas  $\hat{\mathcal{L}} = \{\hat{f}\hat{X}/\hat{f} \in E\}$  satisfait la condition (\*). L'algèbre de Lie  $\langle \frac{\partial}{\partial x}, x \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial x} \rangle$  est saturable de rang 1; ici  $\hat{X} = \frac{\partial}{\partial x}$ . Par contre l'algèbre  $\langle x \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial x} \rangle$  n'est pas saturable. On obtient d'autres exemples d'algèbres saturables; pour cela notons  $R_n = \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \hat{\mathcal{X}}_n$  le champ "radial" et  $E_n^d$  l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré  $d$  en les variables  $x_1, \dots, x_n$ . Les algèbres de Lie  $\mathcal{R}_n^d := E_n^d R_n = \{f.R_n/f \in E_n^d\}$  sont commutatives de rang ponctuel générique 1. Parmi ces algèbres seules les  $\mathcal{R}_n^0$ ,  $n \geq 2$ , sont saturables. On peut fabriquer d'autres sous algèbres de  $\hat{\mathcal{X}}_n$  au moyen de  $\mathcal{R}_n^d$ . Par exemple les algèbres  $\bar{\mathcal{R}}_n^d$ , engendrées par le champ radial et  $\mathcal{R}_n^d$ , sont résolubles de rang 1. Les sous algèbres de  $\text{End} \mathbb{R}^n$ , en particulier les  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ , peuvent être vues comme des algèbres de champs de vecteurs linéaires sur  $\mathbb{R}^n$ .

Notons  $\mathfrak{sl}\mathcal{R}_n^d$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des champs de vecteurs engendré par  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  et  $\mathcal{R}_n^d$ ; c'est en fait une sous algèbre de Lie dont la décomposition de Levi-Malcev est :  $\mathfrak{sl}\mathcal{R}_n^d = \mathcal{R}_n^d \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ . Ces algèbres sont de rang maximal  $n$ . De même les algèbres  $\overline{\mathfrak{sl}\mathcal{R}_n^d}$  engendrées par  $\mathcal{R}_n$  et  $\mathfrak{sl}\mathcal{R}_n^d$  ont leur décomposition de Levi-Malcev du type suivant :  $\overline{\mathfrak{sl}\mathcal{R}_n^d} = \overline{\mathcal{R}_n^d} \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ . La définition suivante est naturelle :

**Définition 3.** Soit  $\mathcal{L}^d$  une sous algèbre de Lie de  $\hat{\mathcal{X}}_n$  dont les éléments sont des champs de vecteurs polynômiaux de degré inférieur ou égal à  $d$ . On dit que  $\mathcal{L}^d$  est  $d$ -déterminante si pour toute sous algèbre  $\hat{\mathcal{L}} \subset \hat{\mathcal{E}}_n$  ayant  $\mathcal{L}^d$  pour  $d$ -jet et telle que l'application jet d'ordre  $d$  ( $J^d : \hat{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{L}^d$ ) soit un isomorphisme d'algèbre de Lie, alors  $\hat{\mathcal{L}}$  et  $\mathcal{L}^d$  sont conjuguées : il existe  $\hat{\Phi}$  appartenant à  $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0^n)$  tel que  $\hat{\Phi}_*\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}^d$ .

**Théorème 4.** Les algèbres  $\overline{\mathcal{R}_n^d}$  et  $\overline{\mathfrak{sl}\mathcal{R}_n^d}$  sont  $d+1$  déterminantes.

*Démonstration.* Soit  $\hat{\mathcal{L}} \subset \hat{\mathcal{X}}_n$  une sous algèbre telle que  $J^{d+1} : \hat{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{L}^{d+1}$  soit un isomorphisme avec  $\mathcal{L}^{d+1}$  égal à  $\overline{\mathcal{R}_n^d}$  ou  $\overline{\mathfrak{sl}\mathcal{R}_n^d}$ . Il existe donc un élément  $\hat{R}$  de  $\hat{\mathcal{L}}$  dont le jet d'ordre  $d+1$  est précisément  $R_n$ . Le théorème de linéarisation de Poincaré produit un difféomorphisme formel  $\hat{\Phi}$  vérifiant  $J^{d+1}\hat{\Phi} = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$  et  $\hat{\Phi}_*\hat{R} = R_n$ , où  $\text{Id}_{\mathbb{R}^n}$  désigne l'identité de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\hat{X}$  un élément de  $\hat{\mathcal{L}}$  tel que  $J^{d+1}\hat{X} = X_d$  appartient à  $\mathcal{R}_n^d$  ou à  $\mathfrak{sl}\mathcal{R}_n^d$ . Comme  $[R, X_d] = dX_d$  on a  $[\hat{R}, \hat{X}] = d\hat{X}$  puisque  $J^{d+1}$  est un isomorphisme. On en déduit que :

$$[\hat{\Phi}_*\hat{R}, \hat{\Phi}_*\hat{X}] = d\hat{\Phi}_*\hat{X}.$$

Un calcul élémentaire montre que le champ formel  $\hat{\Phi}_*\hat{X}$  est homogène de degré  $d+1$ ; comme  $J^{d+1}\hat{\Phi} = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ ,  $\hat{\Phi}_*\hat{X} = X_d$ . Ainsi  $\hat{\Phi}_*\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}^{d+1}$ .  $\square$

On déduit du théorème précédent l'existence de  $\hat{\Phi}$  tel que  $\hat{\Phi}_*\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}^{d+1}$ . Soit  $\Phi$  une réalisation de Borel de  $\hat{\Phi}$ , et  $\mathcal{L} = (\Phi^{-1})_*\mathcal{L}^{d+1}$ . Alors  $\mathcal{L}$  est une réalisation de  $\hat{\mathcal{L}}$  telle que  $T_0 : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  soit un isomorphisme; d'où le :

**Corollaire 5.** Soit  $\hat{\mathcal{L}} \subset \hat{\mathcal{X}}_n$  une sous algèbre de Lie. On suppose que  $J^{d+1}\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}^{d+1}$  est une sous algèbre de Lie et que  $J^{d+1} : \hat{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{L}^{d+1}$  est un isomorphisme. Si  $\mathcal{L}^{d+1}$  est égal à  $\overline{\mathcal{R}_n^d}$  ou  $\overline{\mathfrak{sl}\mathcal{R}_n^d}$ , alors  $\hat{\mathcal{L}}$  possède une réalisation  $C^\infty$   $\mathcal{L}$  telle que  $T_0 : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  soit un isomorphisme.

Considérons à présent une algèbre de Lie saturable, de rang 1 et de dimension finie :

$$\hat{\mathcal{L}} = E.\hat{X} = \langle \hat{X}, \hat{f}_1\hat{X}, \dots, \hat{f}_p\hat{X} \rangle$$

où  $\hat{f}_k \in \hat{\mathcal{E}}_n$ . Ici  $\dim \hat{\mathcal{L}} = \dim E = p+1$  que l'on suppose supérieure ou égale à 2. Le fait que  $\hat{\mathcal{L}}$  soit une algèbre de Lie implique que le sous espace vectoriel  $E = \langle 1, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p \rangle$  est invariant sous l'action de la dérivation  $\hat{X}$ ; ce qui conduit au système différentiel :

$$(1) \quad \mathcal{D}(\hat{X}) \begin{cases} \hat{X}(\hat{f}_1) & = \sum_{j=0}^p \lambda_1^j \hat{f}_j \\ \cdot & \cdot \\ \hat{X}(\hat{f}_p) & = \sum_{j=0}^p \lambda_p^j \hat{f}_j \end{cases}$$

où l'on a posé  $\hat{f}_0 = 1$ . On distingue plusieurs cas suivant la nature du premier jet non nul du champ  $\hat{X}$ .

1.2.1. *Algèbres saturables de rang 1 non singulières.* Dans ce cas le champ formel  $\hat{X}$  est non singulier. Il existe, en particulier,  $\hat{\Phi}$  appartenant à  $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0^n)$  tel que  $\hat{\Phi}_*\hat{X} = \frac{\partial}{\partial x_1}$  et

$$\hat{\Phi}_*\hat{\mathcal{L}} = E \circ \hat{\Phi}^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \hat{g}_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \hat{g}_p \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle$$

avec  $\hat{g}_i \circ \hat{\Phi} = \hat{f}_i$ . Le système différentiel  $\mathcal{D}(\hat{\Phi}_*\hat{X}) = \mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial x_1})$  devient maintenant un système d'équations différentielles ordinaires :

$$(2) \quad \mathcal{D}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \begin{cases} \frac{\partial \hat{g}_1}{\partial x_1} &= \sum_{j=0}^p \lambda_1^j \hat{g}_j \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{g}_p}{\partial x_1} &= \sum_{j=0}^p \lambda_p^j \hat{g}_j \end{cases}$$

Considérons le comme un système différentiel en une variable  $x_1$ . Il possède un système fondamental de solutions  $s_1, \dots, s_p$  ( $s_k = (s_k^l)$ ,  $l = 1, \dots, p$ ), les  $s_k^l$  étant des germes de fonctions analytiques (mêmes globales) à l'origine de  $\mathbb{R}$ . Il est clair que les solutions formelles  $\hat{g} = (\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_p)$  s'écrivent sous la forme :

$$\hat{g}(x_1, \dots, x_n) = \sum \hat{h}_k^j(x_2, \dots, x_n) \cdot s_j(x_1)$$

où les  $\hat{h}_k^j \in \hat{\mathcal{E}}_{n-1}$ . Soient  $h_k^j \in \mathcal{E}_{n-1}$  des réalisations de Borel des  $\hat{h}_k^j$ , les composantes  $g_1, \dots, g_p$  du vecteur  $g(x_1, \dots, x_n) = \sum h_k^j(x_2, \dots, x_n) \cdot s_j(x_1)$  sont  $\mathcal{C}^\infty$  et solution du système  $\mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial x_1})$ . Une vérification élémentaire montre que  $\mathcal{L}' = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}, g_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, g_p \frac{\partial}{\partial x_1} \rangle$  est une algèbre de Lie dont le jet Taylorien infini est  $\hat{\Phi}_*\hat{\mathcal{L}}$ . En considérant une réalisation  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\hat{\Phi}$  on obtient trivialement une algèbre de Lie,  $\mathcal{L} = \Phi_*^{-1}\mathcal{L}'$ , telle que  $T_0 : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  soit un isomorphisme. D'où la :

**Proposition 6.** *Soit  $\hat{\mathcal{L}} = E.\hat{X} \subset \hat{\mathcal{X}}_n$  une algèbre saturable de rang 1. Si  $\hat{X}$  est non singulier, alors il existe une sous algèbre  $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}_n$  telle que  $T_0 : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  est un isomorphisme.*

1.2.2. *Algèbres saturables de rang 1 à 1-jet nul.* Ici  $J^1\hat{X}$  est identiquement nul. Dans ce cas pour tout élément  $\hat{Z}$  de  $\hat{\mathcal{L}}$  le jet d'ordre 1,  $J^1\hat{Z}$ , de  $\hat{Z}$  est nul. Ceci implique que l'application adjointe  $ad_{\hat{Z}} : \hat{\mathcal{L}} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  est nilpotente. En effet les valeurs propres de  $ad_{\hat{Z}}$  sont nécessairement nulles. Par suite l'algèbre de Lie  $\hat{\mathcal{L}}$  est nilpotente et possède donc un centre non trivial

$$\hat{\mathcal{C}} \subset \hat{\mathcal{L}} = \langle \hat{X}, \hat{f}_1\hat{X}, \dots, \hat{f}_p\hat{X} \rangle.$$

Si  $\hat{X}$  est dans le centre, alors  $[\hat{X}, \hat{f}_i\hat{X}] = 0$  pour tout  $i$ , et donc  $\hat{X}(f_i) = 0$ , pour  $i = 1, \dots, p$ . Il en résulte que  $\hat{\mathcal{L}}$  est abélienne et que  $\hat{X}$  possède une intégrale première non constante si  $\dim \hat{\mathcal{L}} \geq 2$ . Si  $\hat{X}$  n'est pas dans  $\hat{\mathcal{C}}$  alors il existe un élément non constant de  $\hat{\mathcal{E}}_n$  tel que  $\hat{f}\hat{X}$  appartient à  $\hat{\mathcal{C}}$ . Comme  $\hat{f}\hat{X}$  et  $\hat{X}$  commutent,  $\hat{f}$  est une intégrale première non constante, par suite de  $0 = [\hat{f}\hat{X}, \hat{f}_i\hat{X}] = \hat{X}(f_i) \cdot \hat{X}$  on déduit que chaque  $\hat{f}_i$  est une intégrale première de  $\hat{X}$ . Ceci conduit au fait que  $\hat{X}$  appartient à  $\hat{\mathcal{C}}$  en contradiction avec l'hypothèse. Donc  $\hat{\mathcal{L}}$  est abélienne et on a la :

**Proposition 7.** *Soit  $\hat{\mathcal{L}} = E.\hat{X} \subset \hat{\mathcal{X}}_n$  une algèbre saturable de rang 1 et de dimension finie. Si  $J^1\hat{X} = 0$  et  $\dim \hat{\mathcal{L}} > 1$ , alors  $\hat{\mathcal{L}}$  est abélienne et le champ  $\hat{X}$  possède une intégrale première non constante.*

**Remarque 8.** *Si le champ possède une intégrale première non constante  $\hat{f}_0$  on peut supposer que  $\hat{f}_0(0) = 0$  dans le cas saturable. Chaque élément  $\hat{l}$  de  $\hat{\mathcal{E}}_1$  produit une intégrale première  $\hat{l}(\hat{f}_0)$ . En particulier l'espace vectoriel  $\hat{\mathcal{L}} = \{\hat{l}(\hat{f}_0)\hat{X} / \hat{l} \in \hat{\mathcal{E}}_1\}$  est une algèbre de Lie abélienne de dimension infinie.*

Nous allons traiter le cas spécifique, en dimension d'espace 2, des algèbres saturables. L'avantage de la dimension 2 est conséquence d'un résultat de J.-F. Mattei et R. Moussu [14] qui dit que si  $\hat{X}$  est un champ non nul, appartenant à  $\hat{\mathcal{X}}_2$ , ayant une intégrale première formelle non constante, alors l'anneau des ses intégrales premières formelles  $\hat{\mathcal{A}}(\hat{X}) \subset \hat{\mathcal{E}}_2$  est engendré par un élément. Plus précisément il existe  $\hat{f}_0$  dans  $\hat{\mathcal{E}}_2$ , dit minimal, défini à composition à gauche près par les éléments de  $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}, 0)$ , tel que :

$$\hat{\mathcal{A}}(\hat{X}) = \{\hat{l}(\hat{f}_0)/\hat{l} \in \hat{\mathcal{E}}_1\}$$

Cet énoncé est établi dans [14] dans les cadres complexes formel et holomorphe, mais il s'adapte assez facilement au cas réel. On se propose d'établir la :

**Proposition 9.** *Soit  $\hat{\mathcal{L}} = E.\hat{X} \subset \hat{\mathcal{X}}_2$  une sous algèbre saturable de rang 1 et  $\dim \hat{\mathcal{L}} > 1$ . On suppose que  $\hat{\mathcal{L}}$  est abélienne et que le champ  $\hat{X}$  possède une intégrale première non constante. Alors il existe une sous algèbre  $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}_2$  telle que  $T_0 : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  soit un isomorphisme.*

*Démonstration.* Soit  $\hat{f}_0$  une intégrale première minimale de  $\hat{X}$ . La décomposition complexe en facteurs irréductibles de  $\hat{f}_0$  est du type :

$$\hat{f}_0 = \hat{f}_1^{n_1} \dots \hat{f}_k^{n_k} (\hat{f}_{k+1} \bar{\hat{f}}_{k+1})^{n_{k+1}} \dots (\hat{f}_p \bar{\hat{f}}_p)^{n_p}$$

avec  $n_i \in \mathbb{N}$ ,  $\hat{f}_i \in \hat{\mathcal{E}}_2$  pour  $i = 1, \dots, k$  et  $\hat{f}_i \in \hat{\mathcal{O}}_2 \setminus \hat{\mathcal{E}}_2$  pour  $i = k+1, \dots, p$  où  $\hat{\mathcal{O}}_n$  désigne l'anneau des séries formelles en  $n$  variables complexes et  $\bar{\hat{f}}_i$  le conjugué de  $\hat{f}_i$ . Notons  $\hat{\omega}_0$  la 1-forme définie par :

$$\hat{\omega}_0 = \hat{f}_1^{n_1} \dots \hat{f}_k^{n_k} \hat{f}_{k+1} \bar{\hat{f}}_{k+1} \dots \hat{f}_p \bar{\hat{f}}_p \left( \sum_{i=1}^k n_i \frac{d\hat{f}_i}{\hat{f}_i} + \sum_{i=k+1}^p n_i \left( \frac{d\hat{f}_i \bar{\hat{f}}_i}{\hat{f}_i \bar{\hat{f}}_i} \right) \right).$$

Cette 1-forme, à priori complexe, est visiblement réelle et à singularité algébriquement isolée. Soit  $\hat{X}_0$  un champ de vecteurs dual de  $\hat{\omega}_0 : \hat{\omega}_0 = i_{\hat{X}_0} dx_1 \wedge dx_2$ . L'algèbre de Lie  $\hat{\mathcal{L}} = E.\hat{X}$  est du type  $\hat{\mathcal{L}} = \langle \hat{X}, \hat{l}_1(\hat{f}_0)\hat{X}, \dots, \hat{l}_p(\hat{f}_0)\hat{X} \rangle$ . Considérons des réalisations  $\mathcal{C}^\infty$  de

$$\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_k, \hat{g}_{k+1} = \hat{f}_{k+1} \bar{\hat{f}}_{k+1}, \dots, \hat{g}_p = \hat{f}_p \bar{\hat{f}}_p$$

notées respectivement  $f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_p$ . Ces réalisations induisent une réalisation  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\hat{X}_0$ , notée  $X_0$ , possédant l'intégrale première

$f_0 = f_1^{n_1} \dots f_k^{n_k} g_{k+1}^{n_{k+1}} \dots g_p^{n_p}$ . Comme  $\hat{\omega}_0$  est à singularité isolée il existe  $\hat{h} \in \hat{\mathcal{E}}_2$  tel que  $\hat{X} = \hat{h}\hat{X}_0$ .

Le choix d'une réalisation  $h$  de  $\hat{h}$  en produit une,  $X = hX_0$ , pour  $\hat{X}$ . Considérons des réalisations  $l_1, \dots, l_p$  de  $\hat{l}_1, \dots, \hat{l}_p$  respectivement. L'algèbre de Lie  $\mathcal{L} = \langle X, l_1(f_0)X, \dots, l_p(f_0)X \rangle$  est une réalisation abélienne de  $\hat{\mathcal{L}}$  telle que  $T_0 : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  est un isomorphisme.  $\square$

1.2.3. *Algèbres saturables de rang 1 et à 1-jet non nul.* On écrit  $\hat{\mathcal{L}} = \langle \hat{X}, \hat{f}_1\hat{X}, \dots, \hat{f}_p\hat{X}_p \rangle$  avec  $\hat{X}(0) = 0$  et  $J^1\hat{X} \neq 0$ . Ici encore l'espace  $E = \langle 1, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p \rangle$  est invariant par la dérivation  $\hat{X}$ . On se place en dimension 2; nous distinguons les différents types de Jordan pour le 1-jet  $X_1$  de  $\hat{X}$  à conjugaison linéaire près :

- (1)  $\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$  avec  $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$  (cas diagonal réel).
- (2)  $(\alpha x_1 - \beta x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (\beta x_1 + \alpha x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$  où  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  (cas diagonal complexe).
- (3)  $(\lambda x_1 + x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$  (cas non semi-simple).

Le champ  $\hat{X}$  est formellement conjugué à sa partie linéaire dans les cas suivants :

- Cas 1 sans résonance, i.e.  $i_1 \lambda_1 + i_2 \lambda_2 \neq \lambda_j$  pour tout couple  $(i_1, i_2)$  d'entiers,  $i_1 + i_2 \geq 2$  et  $j \in \{1, 2\}$ .

- Cas 2 avec  $\alpha \neq 0$ . On observe ici que les valeurs propres  $\alpha \pm i\beta$  sont complexes et sans résonances lorsque  $\beta \neq 0$ .
- Cas 3 avec  $\lambda \neq 0$ .

### 1.2.3.1 Réalisation $\mathcal{C}^\infty$ dans les cas semi-simples non résonnants

Ils correspondent aux cas diagonal réel sans résonnance (cas 1) et diagonal complexe, c'est à dire au cas 2 avec  $\alpha \neq 0$ . Dans le premier cas, à conjugaison formelle près, on suppose que  $\hat{X} = X_1 = J^1 \hat{X}$ . Le champ  $X_1$  étant semi-simple, il l'est en tant que dérivation et sa restriction à  $E$  l'est aussi. On peut donc supposer que les  $\hat{f}_j$  forment une base de vecteurs propres de  $\hat{X}$  :  $\hat{X}\hat{f}_j = \mu_j \hat{f}_j$ ,  $\mu_j \in \mathbb{R}$ .

Si  $x_1^{i_1} x_2^{i_2}$  est un monôme apparaissant avec un coefficient non nul dans  $\hat{f}_j$ , alors on a :

$$(3) \quad i_1 \lambda_1 + i_2 \lambda_2 = \mu_j.$$

**Lemme 10.** *Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont non résonnants, l'ensemble  $\Lambda$  des couples  $(i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2$  satisfaisant (3) est fini.*

*Démonstration.* On fixe  $(k_1, k_2) \in \Lambda$  réalisant le minimum pour l'ordre lexicographique. Si  $(i_1, i_2)$  appartient à  $\Lambda$  et  $(i_1, i_2) \neq (k_1, k_2)$  on a :

$$(4) \quad (i_1 - k_1)\lambda_1 + (i_2 - k_2)\lambda_2 = 0.$$

Comme  $(\lambda_1, \lambda_2)$  est un couple non résonnant alors  $i_1 \neq k_1$  et  $i_2 \neq k_2$ . Par suite  $i_1 > k_1$  et  $i_2 < k_2$ . Si  $i_2$  était strictement supérieur à  $k_2$ , alors  $(i_1 - k_1)$  et  $(i_2 - k_2)$  seraient positifs ; ce qui créerait une résonnance. Donc  $i_2$  est strictement inférieur à  $k_2$  et ne peut donc prendre qu'un nombre fini de valeurs. Puisque  $i_1$  est déterminé par  $i_2$  le lemme est vérifié.  $\square$

Une conséquence du lemme est que chaque  $\hat{f}_j$  est un polynôme.

Dans le cas diagonal complexe linéaire avec  $\alpha \neq 0$  à conjugaison formelle près on suppose que  $\hat{X}$  est égal à son 1-jet et on obtient un résultat analogue au cas réel. Ainsi l'algèbre  $\hat{\mathcal{L}}$  est conjuguée à une algèbre  $\mathcal{L}_{pol}$  de champs de vecteurs polynomiaux dans les cas diagonal réel non résonnant et diagonal complexe avec  $\alpha \neq 0$  :

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\phi}_* \mathcal{L}_{pol}, \quad \hat{\phi} \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0^2) \text{ et } \mathcal{L}_{pol} \subset \mathcal{X}_2.$$

Si  $\phi \in \text{Diff}(\mathbb{R}_0^2)$  est une réalisation  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\hat{\phi}$  alors  $\mathcal{L} = \phi_* \mathcal{L}_{pol}$  est une réalisation de Borel de  $\hat{\mathcal{L}}$  telle que  $T_0 : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  est un isomorphisme.

### 1.2.3.2 Cas résonnant

Nous étudions d'abord les résonances de type Poincaré-Dulac, cas où le 1-jet de  $\hat{X}$  s'écrit  $X_1 = \lambda(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + nx_2 \frac{\partial}{\partial x_2})$ ,  $\lambda \neq 0$  et  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Ici il y a une seule résonnance :  $n\lambda_1 = \lambda_2$ . D'après le Théorème de Poincaré-Dulac, [6] le champ  $\hat{X}$  est à conjugaison formelle près

$$\hat{X} = \lambda \left[ x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (nx_2 + \mu x_1^n) \frac{\partial}{\partial x_2} \right]$$

avec  $\mu = 0$  ou 1. Lorsque  $\mu = 0$  on est dans le cas diagonal réel. Ce cas se traite comme en 1.2.3.1 :  $\hat{\mathcal{L}}$  est formellement conjuguée à une algèbre polynomiale. Ici encore  $\hat{\mathcal{L}}$  se réalise de façon  $\mathcal{C}^\infty$ .

Sinon on a une ramification du cas  $n = 1, \mu = 1$  qu'on fera en fin de paragraphe.

Nous avons ensuite la situation des résonances pures qui se traite en deux sous cas :

- Cas hyperbolique où le 1-jet  $X_1 = \lambda(qx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - px_2 \frac{\partial}{\partial x_2})$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $p$  et  $q$  sont des entiers positifs et  $\langle p, q \rangle = 1$  ou  $p = 0$  et  $q \neq 0$  ou cas noeud-col  $p = 0$  et  $q = 1$ .
- Cas elliptique :  $X_1 = \beta(-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2})$ , où  $\beta \neq 0$ .

Notons que le champ  $\lambda(qx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - px_2 \frac{\partial}{\partial x_2})$  a une intégrale première monomiale  $x_1^p x_2^q$  tandis que le champ  $\beta(-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2})$  a l'intégrale première  $x_1^2 + x_2^2$ . Nous allons détailler le premier cas, le second présente une certaine similarité. La théorie des formes normales de J. Martinet [13] (ou de la Jordanisation) permet d'écrire  $\hat{X} = \hat{S} + \hat{N}$  avec  $[\hat{S}, \hat{N}] = 0$  et  $\hat{S}$  est formellement conjugué à sa partie linéaire, i.e.  $\hat{\phi}_* \hat{S} = \lambda(qx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - px_2 \frac{\partial}{\partial x_2})$ , et le champ  $\hat{N}$  est nilpotent, ce qui signifie ici que  $J^1 \hat{N} = 0$ . Remarquons que l'on peut supposer pour notre contexte que  $\lambda = 1$ . Comme  $E = \langle 1, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p \rangle$  est invariant sous l'action de  $\hat{X}$ , il l'est sous l'action de sa partie semi simple  $\hat{S}$  la restriction de  $\hat{S}$  à  $E$  reste semi simple, c'est à dire diagonalisable ; à l'action près de  $\hat{\phi}$  on peut supposer que  $\hat{S} = X_1$ . D'où :

$$(5) \quad (qx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - px_2 \frac{\partial}{\partial x_2})(\hat{f}_j) = \mu_j \hat{f}_j.$$

Si  $\mu_j = 0$ ,  $\hat{f}_j$  est une intégrale première de  $\hat{S}$  et s'écrit  $\hat{f}_j = \hat{l}_j(x_1^p x_2^q)$  avec  $\hat{l}_j \in \hat{\mathcal{E}}_1$ . Si  $\mu_j \neq 0$ , alors la relation (5) implique que  $\mu_j$  est de la forme  $\mu_j = qr_j - ps_j$ . Soit

$$F_j = \{(k, l) \in \mathbb{N}^2 \setminus (0, 0) / kq - pl = \mu_j\}$$

et  $(r_j, s_j)$  le plus petit élément de  $F_j$  pour l'ordre lexicographique.

Le lemme technique élémentaire suivant est analogue au Lemme 10 :

**Lemme 11.** *Si  $(k, l)$  appartient à  $F_j$  alors  $(k, l) = (r_j, s_j) + s(p, q)$ , où  $s \in \mathbb{N}$ .*

*Démonstration.* Si  $(p, q) = (1, 0)$ , alors  $(r_j, s_j) = (0, s_j)$  et  $(k, l) = (0, s_j) + k(1, 0)$ . Supposons dorénavant que  $pq \neq 0$ . Si  $(k, l) \neq (r_j, s_j)$  on a  $(k - r_j)q - (l - s_j)p = 0$  et donc  $k - r_j \neq 0$ . Par suite, puisque  $(r_j, s_j)$  est minimal pour l'ordre lexicographique et  $pq \neq 0$ ,  $k - r_j > 0$  et nécessairement  $l - s_j > 0$ . Le fait que  $\langle p, q \rangle = 1$  implique l'existence de  $s$ , d'où le lemme.  $\square$

Il résulte du lemme précédent que l'on peut écrire  $\hat{f}_j = x_1^{r_j} x_2^{s_j} \hat{\varphi}_j(x_1^p x_2^q)$  où  $\hat{\varphi}_j \in \hat{\mathcal{E}}_1$ ,  $r_j$  et  $s_j$  étant des entiers comme ci-dessus. Le champ  $\hat{N}$  commutant avec  $\hat{S} = \lambda(qx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - px_2 \frac{\partial}{\partial x_2})$  a la forme suivante :

$$\hat{N} = x_1 \hat{\alpha}(x_1^p x_2^q) \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \hat{\beta}(x_1^p x_2^q) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

où  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$  appartiennent à  $\hat{\mathcal{E}}_1$ .

En fait en remarquant que les transformations  $(x_1 \hat{A}(x_1^p x_2^q), x_2 \hat{B}(x_1^p x_2^q))$ ,  $\hat{A}, \hat{B} \in \hat{\mathcal{E}}_1$ , laissent invariant  $\hat{S}$  on peut supposer que  $\hat{N}$  est de la forme :

$$\hat{N} = \hat{a}(x_1^p x_2^q) (\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2})$$

où  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  et  $\hat{a} \in \hat{\mathcal{E}}_1$ . Comme le champ  $\hat{X} = \hat{S} + \hat{N}$  agissant sur  $E$  garde au moins un vecteur propre, disons  $\hat{f}_1$ , on a :

$$\hat{X}(x_1^{r_1} x_2^{s_1} \hat{\varphi}_1(x_1^p x_2^q)) = (qr_1 - ps_1) x_1^{r_1} x_2^{s_1} \hat{\varphi}_1(x_1^p x_2^q).$$



Puisque  $\hat{a} \neq 0$  on obtient par un calcul élémentaire :

$$(6) \quad (r_1\lambda_1 + s_1\lambda_2)\hat{\varphi}_1(t) + (p\lambda_1 + q\lambda_2)t\hat{\varphi}'_1(t) = 0.$$

Remarquons la possibilité des cas spéciaux suivants :

- $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$  ; auquel cas  $\hat{X} = \hat{S}$  et (6) ne donne aucun renseignement sur  $\hat{\varphi}_1$ .
- $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$  et  $p\lambda_1 + q\lambda_2 = 0$  ; comme  $\hat{\varphi}_1$  est non identiquement nul,

$$r_1q - s_1p = 0 \quad \text{et} \quad \hat{f}_1 = \hat{\psi}(x_1^p x_2^q)$$

est une intégrale première de  $\hat{X}$  qui s'écrit dans ce cas  $\hat{X} = \hat{b}(x_1^p x_2^q)(qx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - px_2 \frac{\partial}{\partial x_2})$ .

Dans le cas générique où  $(p\lambda_1 + q\lambda_2) \neq 0$  on constate que  $\hat{\varphi}_1$  est un monôme :  $\hat{\varphi}_1 = \epsilon t^s$  avec  $s = \frac{r_1\lambda_1 + s_1\lambda_2}{p\lambda_1 + q\lambda_2} \in \mathbb{N}$  ; ce qui montre également que  $\hat{f}_1$  est monômiale.

**Lemme 12.** *La restriction  $\hat{X}|_E : E \rightarrow E$  de la dérivation  $\hat{X}$  est semi simple.*

*Démonstration.* Si ce n'est pas le cas, comme les valeurs propres de  $\hat{X}$  sont celles de  $\hat{S}$ , et donc réelles sous nos hypothèses, la Jordanisation de  $\hat{X}|_E$  est réelle et il existe, à re-indexation près,  $\hat{f}_1$  et  $\hat{f}_2$  tels que  $\hat{X}(\hat{f}_1) = \mu_1 \hat{f}_1$  et  $\hat{X}(\hat{f}_2) = \mu_1 \hat{f}_2 + \hat{f}_1$ . Il en résulte que :

$$[\hat{f}_1 \hat{X}, \hat{f}_2 \hat{X}] = (\hat{f}_1 \hat{X}(\hat{f}_2) - \hat{f}_2 \hat{X}(\hat{f}_1)) \hat{X} = \hat{f}_1^2 \hat{X}.$$

On en déduit que  $\hat{f}_1^2 \in E$  ; de même on a les équations :

$$(7) \quad [\hat{f}_1 \hat{X}, \hat{f}_1^2 \hat{X}] = \mu_1 \hat{f}_1^3 \hat{X}$$

$$(8) \quad [\hat{f}_1^2 \hat{X}, \hat{f}_2 \hat{X}] = (\hat{f}_1^2 \hat{X}(\hat{f}_2) - \hat{f}_2 \hat{X}(\hat{f}_1^2)) \hat{X} = (\hat{f}_1^3 - \mu_1 \hat{f}_1^2 \hat{f}_2) \hat{X}$$

On en déduit que si  $\mu_1$  est non nul, d'après (7),  $\hat{f}_1^3$  appartient à  $E$  ; dans le cas contraire  $\hat{f}_1^3$  appartient également à  $E$  d'après (8). Supposons par induction que  $\hat{f}_1^k$  appartient à  $E$ , on a alors  $[\hat{f}_1 \hat{X}, \hat{f}_1^k \hat{X}] = \mu_1(k-1)\hat{f}_1^{k+1} \hat{X}$ . Et de nouveau  $\hat{f}_1^{k+1}$  appartient à  $E$  lorsque  $\mu_1$  est non nul. Si  $\mu_1$  est nul on a  $[\hat{f}_1^k \hat{X}, \hat{f}_2 \hat{X}] = \hat{f}_1^{k+1} \hat{X}$ , et on en déduit encore que  $\hat{f}_1^{k+1}$  appartient à  $E$ . Comme  $\hat{f}_1(0) = 0$ , les ordres des  $\hat{f}_1^k$  augmentent ; ce qui implique que  $E$  est dimension infinie. Ceci est en contradiction avec  $\dim E < +\infty$ .  $\square$

Il résulte du Lemme 12 que  $\hat{\mathcal{L}} = \{\hat{X}, \hat{f}_1 \hat{X}, \dots, \hat{f}_p \hat{X}\}$ , où les  $\hat{f}_i$  sont des vecteurs propres de  $\hat{X}$  :  $\hat{X}(\hat{f}_i) = \mu_i \hat{f}_i$ ,  $\mu_i \in \mathbb{R}$ . La structure d'algèbre de Lie est donnée par  $[\hat{X}, \hat{f}_i \hat{X}] = \mu_i \hat{f}_i \hat{X}$  et  $[\hat{f}_i \hat{X}, \hat{f}_j \hat{X}] = (\mu_i - \mu_j) \hat{f}_i \hat{f}_j \hat{X}$ .

Comme  $f_0 = 1$  appartient à  $E$  l'un des  $\mu_i$ , disons  $\mu_0$ , est nul. Si tous les  $\mu_i$  sont nuls, alors tous les  $\hat{f}_i$  sont des intégrales premières du champ  $\hat{X}$  ; comme  $E$  est supposé de dimension supérieure ou égale à deux l'une au moins de ces intégrales premières est non constante. Le champ  $\hat{X}$  s'écrit  $\hat{X} = \hat{b}(x_1^p x_2^q)(qx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - px_2 \frac{\partial}{\partial x_2})$  et  $\hat{f}_i$  est égale à  $\hat{l}_i(x_1^p x_2^q)$ , où  $\hat{b}$  et les  $\hat{l}_i$  appartiennent à  $\hat{\mathcal{E}}_1$ . Soit  $\hat{\Phi}$  le difféomorphisme de mise sous forme normale qui linéarise  $\hat{S}$ . En choisissant des réalisations  $\Phi$ ,  $b$  et  $f_i$  de  $\hat{\Phi}$ ,  $\hat{b}$  et  $\hat{f}_i$  respectivement on obtient une réalisation  $\mathcal{L}$  de  $\hat{\mathcal{L}}$  telle que  $T_{\underline{0}} : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  est un isomorphisme.

Supposons que les  $\mu_i$  sont non tous nuls. Nous devons envisager deux cas : celui où tous les  $\mu_i$  sont non nuls pour  $i \neq 0$ , et celui où l'un des  $\mu_i$  est nul pour  $i \neq 0$ . Plaçons nous dans ce dernier cas. Disons  $\hat{X} \hat{f}_1 = 0$ ,  $\hat{f}_1$  est non constant et  $\hat{X} \hat{f}_2 = \mu_2 \hat{f}_2$  avec  $\mu_2 \neq 0$ . On peut supposer que  $\hat{f}_1(0) = 0$  ; ce que l'on fera. On a  $[\hat{f}_1 \hat{X}, \hat{f}_2 \hat{X}] = \mu_2 \hat{f}_1 \hat{f}_2 \hat{X}$ . Et donc  $\hat{f}_1 \hat{f}_2^2 \hat{X}$  appartient à  $\hat{\mathcal{L}}$ . De même  $[\hat{f}_1 \hat{X}, \hat{f}_1 \hat{f}_2 \hat{X}] = \mu_2 \hat{f}_1^2 \hat{f}_2 \hat{X}$  et donc  $\hat{f}_1^2 \hat{f}_2 \hat{X}$  appartient à  $\hat{\mathcal{L}}$ . Par induction on montre

que tous les  $\hat{f}_1^k \hat{f}_2 \hat{X}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , sont dans  $\hat{\mathcal{L}}$ . Comme  $\hat{f}_1(0) = 0$  ils forment une famille libre en contradiction avec la finitude de la dimension de  $\hat{\mathcal{L}}$ . Ainsi ce cas ne se présente pas.

Considérons la situation où tous les  $\mu_i$ , à l'exception de  $\mu_0$ , sont non nuls, i.e. la dimension du sous espace propre  $V(0)$  associé à  $\mu_0$  est 1. Les  $\hat{f}_i$  étant propres pour  $\hat{X}$ , ils le sont pour sa partie semi-simple  $\hat{S}$  et sont annulés par la partie nilpotente :  $\hat{S}\hat{f}_i = \mu_i \hat{f}_i$  et  $\hat{N}\hat{f}_i = 0$ . Supposons l'existence de  $\mu_i \neq \mu_j$  pour deux indices distincts  $i$  et  $j$  qu'on suppose être 1 et 2. On a alors  $[\hat{f}_1 \hat{X}, \hat{f}_2 \hat{X}] = (\mu_2 - \mu_1) \hat{f}_1 \hat{f}_2 \hat{X}$  et donc  $\hat{f}_1 \hat{f}_2 \hat{X}$  est dans  $\hat{\mathcal{L}}$ . On vérifie que  $\hat{X}(\hat{f}_1 \hat{f}_2) = (\mu_2 + \mu_1) \hat{f}_1 \hat{f}_2$ . Notons que  $\mu_2 + \mu_1$  est non nul puisque  $V(0)$  est de dimension réelle 1. On a aussi

$$[\hat{f}_1 \hat{X}, \hat{f}_1 \hat{f}_2 \hat{X}] = \mu_2 \hat{f}_1^2 \hat{f}_2 \hat{X}.$$

Comme  $\mu_2$  est non nul,  $\hat{f}_1^2 \hat{f}_2 \hat{X}$  appartient à  $\hat{\mathcal{L}}$ . Supposons que pour  $n \leq k$ ,  $\hat{f}_1^k \hat{f}_2 \hat{X}$  soit dans  $\hat{\mathcal{L}}$ . Des relations  $\hat{X}(\hat{f}_1^n \hat{f}_2) = (n\mu_1 + \mu_2) \hat{f}_1^n \hat{f}_2$  et  $\dim V(0) = 1$  on voit que nécessairement  $n\mu_1 + \mu_2 \neq 0$ . On déduit alors de  $[\hat{f}_1 \hat{X}, \hat{f}_1^k \hat{f}_2 \hat{X}] = ((k-1)\mu_1 + \mu_2) \hat{f}_1^{k+1} \hat{f}_2 \hat{X}$  que  $\hat{f}_1^{k+1} \hat{f}_2 \hat{X}$  est dans  $\hat{\mathcal{L}}$ . Ainsi  $\hat{f}_1^k \hat{f}_2 \hat{X}$  appartient à  $\hat{\mathcal{L}}$  et ceci pour tout  $k$ . Ce qui contredit la finitude de la dimension de  $E$ .

Donc tous les réels  $\mu_i$ , hormis  $\mu_0$ , sont égaux à une constante  $\mu$  non nulle. On en déduit que les  $\hat{f}_i$  sont du type  $\hat{f}_i = x_1^r x_2^s \hat{\varphi}_i(x_1^p x_2^q)$ . L'algèbre  $\hat{\mathcal{L}}$  a donc la présentation suivante

$$\hat{\mathcal{L}} = \langle \hat{X}, \hat{f}_1 \hat{X}, \dots, \hat{f}_p \hat{X} \rangle$$

avec  $[\hat{X}, \hat{f}_i \hat{X}] = \mu \hat{f}_i \hat{X}$ ,  $\mu = qr - ps$  et  $[\hat{f}_i \hat{X}, \hat{f}_j \hat{X}] = 0$ . Rappelons que  $\hat{N}$  est du type

$$\hat{a}(x_1^p x_2^q) \left( \lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

Comme on l'a vu en (6) :

$$(r\lambda_1 + s\lambda_2) \hat{\varphi}_i + (p\lambda_1 + q\lambda_2) t \hat{\varphi}'_i \equiv 0.$$

Si  $p\lambda_1 + q\lambda_2 \neq 0$  alors chaque  $\hat{\varphi}_i$  est un monôme, et donc  $\hat{f}_i$  aussi :  $\hat{f}_i = f_i = x_1^r x_2^s (x_1^p x_2^q)^{k_i}$ . Soient  $a$  une réalisation de  $\hat{a}$  et  $X = (qx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - px_2 \frac{\partial}{\partial x_2}) + a(x_1^p x_2^q) (\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2})$ . L'algèbre  $\mathcal{L} = \langle X, f_1 X, \dots, f_p X \rangle$  est alors, à conjugaison  $\mathcal{C}^\infty$  près, une réalisation  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\hat{\mathcal{L}}$  telle que  $T_0 : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  est un isomorphisme.

Si  $p\lambda_1 + q\lambda_2 = 0$ , alors  $\hat{X}$  est de la forme

$$\hat{X} = \hat{b}(x_1^p x_2^q) \left( qx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - px_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right);$$

et puisque  $\mu = qr - ps \neq 0$  on vérifie qu'en fait  $\hat{b}$  est constant. Ainsi

$$\hat{\mathcal{L}} = \langle X = qx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - px_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \hat{\varphi}_1(x_1^p x_2^q) X, \dots, \hat{\varphi}_p(x_1^p x_2^q) X \rangle,$$

où  $\hat{\varphi}_i$  appartient à  $\hat{\mathcal{E}}_1$ . Ici aussi, en réalisant les  $\hat{\varphi}_i$ , on obtient une réalisation  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathcal{L}$  telle que  $T_0 : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  soit un isomorphisme.

Lorsque  $\hat{X}$  est elliptique on considère le complexifié  $\hat{\mathcal{L}}^{\mathbb{C}}$  de l'algèbre de Lie  $\hat{\mathcal{L}}$ . Le difféomorphisme  $(x_1, x_2) \mapsto \Phi(x_1, x_2) = (x_1 + ix_2, ix_1 + x_2)$  conjugue  $\hat{X}$  à  $\hat{Y} = X_1 + \hat{N}$  où  $X_1 = i\beta(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2})$  et  $\hat{N}$  est nilpotent ( $J^1 \hat{N} = 0$ ). En suivant la preuve de ce qui précède on voit que :

- Soit  $\hat{X} = \hat{b}(x_1^2 + x_2^2) X$ , où  $X = \beta(-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2})$  et

$$\hat{\mathcal{L}} = \langle \hat{X}, \hat{\varphi}_1(x_1^2 + x_2^2) X, \dots, \hat{\varphi}_p(x_1^2 + x_2^2) X \rangle,$$

où  $\hat{b}$  et les  $\hat{\varphi}_i$  appartiennent à  $\hat{\mathcal{E}}_1$ .

- Soit les vecteurs propres de  $\hat{\Phi}_* \hat{X}^{\mathbb{C}}$  sont des polynômes,  $\hat{X}^{\mathbb{C}}$  étant le complexifié de  $\hat{X}$ . Ce qui permet d'en déduire, à conjugaison formelle près, que  $\hat{\mathcal{L}} = \langle \hat{X}, f_1 \hat{X}, \dots, f_p \hat{X} \rangle$ , où les  $f_i$  sont des polynômes.

Selon le cas, en réalisant  $\hat{b}$  et les  $\hat{\varphi}_i$  ou  $\hat{X}$ , on obtient encore une réalisation  $\mathcal{L}$  de  $\hat{\mathcal{L}}$  telle que  $T_0 : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  est un isomorphisme.

### 1.2.3.3 Les cas non semi-simples

Lorsque  $\hat{X}$  a son 1-jet nilpotent, disons  $x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$ ,  $\hat{X}$  est lui même nilpotent. L'exemple typique d'algèbre saturable présentant cette configuration est  $\hat{\mathcal{L}} = \langle \hat{X} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \hat{f}_1(x_1) \hat{X}, \dots, \hat{f}_p(x_1) \hat{X} \rangle$ , où les  $\hat{f}_i \in \hat{\mathcal{E}}_1$ .

Soit  $\hat{\mathcal{L}} = \langle \hat{X}, \hat{f}_1 \hat{X}, \dots, \hat{f}_p \hat{X} \rangle$  une sous algèbre de Lie saturable de  $\hat{\mathcal{X}}_2$  avec  $J^1 \hat{X} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$ . Comme  $\hat{X}$  est nilpotent en suivant la preuve du Lemme 12 on voit que les  $\hat{X} \hat{f}_i$  sont nuls et que  $\hat{\mathcal{L}}$  est abélienne. En particulier si  $\dim \hat{\mathcal{L}} \geq 2$ , les  $\hat{f}_i$  sont non constants ; et  $\hat{X}$  a ainsi une intégrale première non constante. La Proposition 9 traite ce cas.

Dans le cas contraire, à difféomorphisme formel près,  $\hat{X} = (\lambda x_1 + x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Notons qu'on peut supposer que  $\lambda = 1$ , ce que l'on fera. La Jordanisation du champ  $\hat{X}$  est réelle ; on en déduit que celle de  $\hat{X}|_E$  est également réelle. Considérons une suite  $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m$  d'éléments de  $E$  telle que  $\hat{X}(\hat{f}_1) = \mu \hat{f}_1$  et  $\hat{X}(\hat{f}_i) = \mu \hat{f}_i + \hat{f}_{i-1}$  pour  $i = 2, \dots, m$ . Posons  $\hat{f}_i = \sum_{j \geq k_i} A_j^i$ , où  $A_j^i$  est homogène de degré  $j$  et  $A_{k_i}^i$  est non nul. La condition  $\hat{X}(\hat{f}_1) = \mu \hat{f}_1$  implique que :

$$(9) \quad (\mu - j) A_j^1 = x_2 \frac{\partial A_j^1}{\partial x_1} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Si  $\mu - j$  est non nul alors  $A_j^1 \equiv 0$ . En effet si on écrit  $A_j^1 = \sum_{k=l}^j \alpha_k^j x_1^k x_2^{j-k}$  en reportant dans l'équation précédente on voit que nécessairement  $\alpha_l^j = 0$ . On en déduit que  $\mu = k_1$  et  $\hat{f}_1 = \alpha x_2^{k_1}$ . Supposons qu'on ait montré que  $\hat{f}_{i-1}$  est un polynôme. L'équation  $\hat{X}(\hat{f}_i) = \mu \hat{f}_i + \hat{f}_{i-1}$  implique que :

$$(\mu - j) A_j^i = x_2 \frac{\partial A_j^i}{\partial x_1} \quad \forall j > d^\circ \hat{f}_{i-1}.$$

Cette équation est du même type que (9) ; on en déduit que tous les  $A_j^i$  sont nuls lorsque  $j > d^\circ \hat{f}_{i-1}$  à l'exception peut être d'un seul. Ce qui implique que  $\hat{f}_i$  est un polynôme.

En considérant une base dans laquelle la matrice de  $\hat{X}|_E$  est sous forme de Jordan on déduit que  $\hat{\mathcal{L}}$  est conjuguée à  $\langle X = (x_1 + x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, f_1 X, \dots, f_p X \rangle$ , où les  $f_i$  sont des polynômes. En résumé nous obtenons le :

**Théorème 13.** *Soit  $\hat{\mathcal{L}} \subset \hat{\mathcal{X}}_2$  une sous algèbre de Lie de dimension finie, saturable et de rang ponctuel 1. Il existe une réalisation  $\mathcal{C}^\infty$  notée  $\mathcal{L}$  de  $\hat{\mathcal{L}}$  telle que  $T_0 : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  soit un isomorphisme d'algèbre de Lie.*

**1.3. Dimension deux : algèbres abéliennes de rang deux.** La Proposition 7 montre que les algèbres abéliennes jouent un rôle spécial dans notre contexte. Toutefois cette proposition

ne possède pas de généralisation lorsque le rang ponctuel générique est plus grand que 1. Par exemple l'algèbre engendrée par les trois champs

$$X_0 = x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_1 = x_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}, \quad \text{et} \quad X_2 = x_1 x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_4}, \quad [X_0, X_1] = X_2$$

est une sous algèbre de rang 2 de  $\hat{\mathcal{X}}_4$ ; elle est toutefois nilpotente. En fait on a la :

**Proposition 14.** *Soit  $\hat{\mathcal{L}} \subset \hat{\mathcal{X}}_n$  une sous algèbre de Lie de dimension finie. On suppose que  $J^1 \hat{\mathcal{L}} = \{0\}$ , i.e.  $\hat{\mathcal{L}} \subset \mathfrak{M}_n^2 \hat{\mathcal{X}}_n$ . Alors  $\hat{\mathcal{L}}$  est nilpotente.*

*Démonstration.* Il suffit d'établir que les applications  $ad_{\hat{X}} : \hat{\mathcal{L}} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  définies par  $ad_{\hat{X}}(\hat{Y}) = [\hat{X}, \hat{Y}]$  et  $\hat{X} \in \hat{\mathcal{L}}$ , sont toutes nilpotentes d'après [3]. On peut, quitte à complexifier, supposer que  $\hat{\mathcal{L}}$  est définie sur  $\mathbb{C}$ , i.e.  $\hat{\mathcal{L}} \subset \hat{\mathcal{X}}_n(\mathbb{C}_{,0}^n)$ . Soient  $\hat{X}$  et  $\hat{Y}$  deux éléments de  $\hat{\mathcal{L}}$  tels que  $\hat{Y}$  est propre pour  $ad_{\hat{X}} : ad_{\hat{X}}(\hat{Y}) = \mu \hat{Y}$ . Comme  $J^1 \hat{X} = 0$  l'ordre du premier jet non nul de  $[\hat{X}, \hat{Y}]$  est strictement supérieur à celui de  $\hat{Y}$ ; on en déduit que  $\mu$  est nulle et par suite  $ad_{\hat{X}}$  est nilpotente.  $\square$

On appelle quotient formel tout élément du corps des fractions  $\hat{\mathcal{M}}_n$  de l'anneau des séries formelles de  $\hat{\mathcal{E}}_n$ . Un élément de  $\hat{\mathcal{M}}_n$  s'écrit  $\frac{\hat{f}}{\hat{g}}$ , où  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  sont des éléments de  $\hat{\mathcal{E}}_n$  sans facteur commun. Pour les algèbres commutatives de champs formels, on obtient en dimension deux d'espace :

**Lemme 15.** *Soit  $\hat{\mathcal{L}} \subset \hat{\mathcal{X}}_2$  une algèbre de Lie abélienne de champs formels de rang 2. Alors  $\dim \hat{\mathcal{L}} = 2$ .*

**Preuve** Soient  $\hat{X}$  et  $\hat{Y}$  deux éléments de  $\hat{\mathcal{L}}$  tels que  $\det(\hat{X}, \hat{Y}) \neq 0$ . Si  $\hat{Z}$  appartient à  $\hat{\mathcal{L}}$  il existe des quotients formels  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  tels que  $\hat{Z} = \hat{A}\hat{X} + \hat{B}\hat{Y}$  (algèbre linéaire sur le corps  $\hat{\mathcal{M}}_2$ ). Comme  $[\hat{X}, \hat{Y}] = [\hat{X}, \hat{Z}] = [\hat{Y}, \hat{Z}] = 0$  on a  $\hat{X}(\hat{A}) = \hat{X}(\hat{B}) = \hat{Y}(\hat{A}) = \hat{Y}(\hat{B}) = 0$ . Par suite on en déduit que  $\frac{\partial \hat{A}}{\partial x_i} = \frac{\partial \hat{B}}{\partial x_i} = 0$ , pour  $i = 1, 2$ . Ce qui implique que  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  sont constantes.

**Exemples 16.** *Dans chacun des cas suivants l'algèbre  $\hat{\mathcal{L}}$  est abélienne de rang 2.*

- (1) *Variables séparées :*  $\hat{\mathcal{L}} = \langle \hat{f}_1(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1}, \hat{f}_1(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle$ , où  $\hat{f}_i$  appartient à  $\hat{\mathcal{E}}_1$ .
- (2) *Linéaires diagonales :*

$$\hat{\mathcal{L}} = \langle \lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \mu_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mu_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle,$$

avec  $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 \neq 0$ .

- (3) *Résonnantes :*  $\hat{\mathcal{L}} = \langle qx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - px_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \hat{a}(x_1^p x_2^q) (\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}) \rangle$ , où  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$  et  $p\lambda_1 + q\lambda_2 \neq 0$ .

On dispose, dans chacun de ces cas, de réalisation  $\mathcal{C}^\infty \mathcal{L}$  de  $\hat{\mathcal{L}}$  telle que  $T_0 : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  soit un isomorphisme.

Si  $\hat{X}$  et  $\hat{Y}$  sont tels que  $\det(\hat{X}, \hat{Y}) \neq 0$  il existe deux 1-formes différentielles  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$ , à coefficients dans  $\hat{\mathcal{M}}_2$  telles que  $i_{\hat{X}} \hat{\alpha} = i_{\hat{Y}} \hat{\beta} = 1$  et  $i_{\hat{X}} \hat{\beta} = i_{\hat{Y}} \hat{\alpha} = 0$ . La commutation de  $\hat{X}$  et  $\hat{Y}$  implique que les 1-formes  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$  sont fermées.

1.3.1. *Formes normales des formes fermées à coefficient dans  $\hat{\mathcal{M}}_n$ .* Considérons un germe de 1-forme méromorphe fermée  $\omega$  à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ ; il s'écrit sous la forme  $\omega = \frac{\Theta}{f}$ , avec  $\Theta \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$ , l'ensemble des germes de 1-forme holomorphe et  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$ ,  $f = f_1^{n_1+1} \dots f_p^{n_p+1}$ , les  $f_i$  étant irréductibles et aucun des  $f_i$  ne divisant  $\Theta$ . D. Cerveau et J.-F. Mattei [6] établissent la décomposition, en "éléments simples", suivante de  $\omega$  :

$$\omega = \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_i}{f_i} + d\left(\frac{H}{f_1^{n_1} \dots f_p^{n_p}}\right)$$

où  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  (résidu de  $\omega$  le long de  $f_i$ ) et  $H \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$  l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ . Dans le cas réduit où les  $n_i$  sont nuls  $\omega$  est à pôles simples,  $\omega = \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_i}{f_i} + dH$ ,  $\omega$  est dite logarithmique. La décomposition en éléments simples s'étend aux formes méromorphes formelles fermées, c'est à dire à coefficients dans le corps des fractions  $\hat{\mathcal{M}}_n(\mathbb{C}, 0)$  du complété formel  $\hat{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^n, 0)$  de  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$ . Pour un tel  $\hat{\omega}$  on a de manière analogue :

$$\hat{\omega} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{d\hat{f}_i}{\hat{f}_i} + d\left(\frac{\hat{H}}{\hat{f}_1^{n_1} \dots \hat{f}_p^{n_p}}\right).$$

Il n'existe pas de référence pour ce fait que nous n'utiliserons qu'en dimension 2. Voici le plan de la preuve en dimension 2. Ecrivons  $\hat{\omega}$  sous la forme  $\hat{\omega} = \frac{\hat{\Theta}}{\hat{f}}$  où  $\hat{\Theta} \in \hat{\Omega}^1(\mathbb{C}^2, 0)$  et  $\hat{f} \in \hat{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^2, 0)$ .

On peut d'ailleurs supposer à conjugaison près que  $\hat{f} = f$  est convergente d'après [6]. La preuve se fait par récurrence sur le nombre d'éclatements pour désingulariser  $f$ . Si la courbe  $f = 0$  est lisse ou un croisement normal, c'est à dire  $f = x^p y^q$  la preuve est un calcul simple en développant  $\hat{\Theta}$  en série. On suppose le résultat démontré lorsque  $f$  se désingularise en moins de  $N$  éclatements. Si  $f$  se désingularise en  $N$  éclatements, on éclate et en chaque point du diviseur exceptionnel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. En utilisant le fait que l'éclaté d'une série formelle est transversalement formelle au sens de [14] (ie holomorphe dans la "direction" du diviseur exceptionnel) on peut modifier puis recoller les solutions locales produites par l'induction. Notons que les  $\hat{f}_i$  sont donnés par la décomposition de  $f$  et les  $\lambda_i$  par l'induction. Seule donc la série  $\hat{H}$  est à déterminer ; l'indication permet par recollement de construire l'éclaté de  $\hat{H}$  et donc  $\hat{H}$ .

Considérons à présent une 1-forme méromorphe formelle fermée  $\hat{\omega} = \frac{\hat{\Theta}}{\hat{f}}$  où

$$\hat{\Theta} = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i dx_i \in \hat{\Omega}_n^1$$

et les  $\hat{a}_i, \hat{f} \in \hat{\mathcal{E}}_n$ . Notons  $\hat{f}_{\mathbb{C}}$  le complexifié de  $\hat{f}$ . La décomposition en facteurs irréductibles de  $\hat{f}_{\mathbb{C}}$  est du type  $\hat{f}_{\mathbb{C}} = \hat{f}_1^{n_1+1} \dots \hat{f}_q^{n_q+1} (\hat{g}_1 \hat{h}_1)^{m_1+1} \dots (\hat{g}_l \hat{h}_l)^{m_l+1}$ , où les  $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_q$  sont réels, i.e. des complexifiés d'éléments de  $\hat{\mathcal{E}}_n$ , et les  $\hat{g}_j$  et  $\hat{h}_j$  sont complexes conjugués ; ce qui revient à dire que  $\hat{g}_j \hat{h}_j$  est le complexifié d'un élément de  $\hat{\mathcal{E}}_n$  du type  $\hat{P}_j^2 + \hat{Q}_j^2 = (\hat{P}_j + i\hat{Q}_j)(\hat{P}_j - i\hat{Q}_j)$ .

Si  $\hat{\omega}^{\mathbb{C}}$  est le complexifié de  $\hat{\omega}$  sa décomposition en éléments simples s'écrit :

$$\hat{\omega}^{\mathbb{C}} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{d\hat{f}_i}{\hat{f}_i} + \sum_{j=1}^l \mu_j \frac{d\hat{g}_j}{\hat{g}_j} + \sum_{j=1}^l \bar{\mu}_j \frac{d\hat{h}_j}{\hat{h}_j} + d\left(\frac{\hat{K}}{\hat{f}_1^{n_1} \dots \hat{f}_p^{n_p} (\hat{g}_1 \hat{h}_1)^{m_1} \dots (\hat{g}_l \hat{h}_l)^{m_l}}\right)$$

avec  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $\mu_j \in \mathbb{C}$ ,  $\hat{K} \in \hat{\mathcal{O}}(\mathbb{C}_0^n)$  réel. La forme  $\hat{\omega}^{\mathbb{C}}$  est invariante sous l'action de l'automorphisme de corps  $z \mapsto \bar{z}$ . De sorte que  $\hat{\omega}$  s'écrit finalement sous la forme (\*\*):

$$\hat{\omega} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{d\hat{f}_i}{\hat{f}_i} + \sum_{j=1}^l (a_j \frac{d(\hat{P}_j^2 + \hat{Q}_j^2)}{(\hat{P}_j^2 + \hat{Q}_j^2)} + b_j \frac{\hat{P}_j d\hat{Q}_j - \hat{Q}_j d\hat{P}_j}{(\hat{P}_j^2 + \hat{Q}_j^2)}) + d\left(\frac{\hat{H}}{\hat{f}_1^{n_1} \dots \hat{f}_p^{n_p} (\hat{P}_1^2 + \hat{Q}_1^2)^{m_1} \dots (\hat{P}_l^2 + \hat{Q}_l^2)^{m_l}}\right)$$

avec  $\lambda_i, a_j, b_j \in \mathbb{R}$ ,  $\hat{f}_i, \hat{P}_j, \hat{Q}_j$  et  $\hat{H}$  dans  $\hat{\mathcal{E}}_n$ . On dit que  $\hat{\omega}$  est logarithmique si elle est à pôles simples; c'est à dire les  $n_i$  et  $m_j$  sont tous nuls. Remarquons qu'une telle forme possède une "réalisation  $\mathcal{C}^\infty$ " au sens où si l'on écrit  $\hat{\omega} = \frac{\hat{\Theta}}{\hat{f}}$  alors il existe  $\Theta$  et  $f$  qui réalisent respectivement  $\hat{\Theta}$  et  $\hat{f}$  et  $\omega = \frac{\Theta}{f}$  est encore fermée.

1.3.2. *Classification.* Revenons à une sous algèbre commutative  $\hat{\mathcal{L}} = \langle \hat{X}, \hat{Y}, [\hat{X}, \hat{Y}] = 0 \rangle$  de  $\hat{\mathcal{X}}_2$ . Supposons que l'un des éléments de  $\hat{\mathcal{L}}$ , disons  $\hat{X}$ , soit non singulier. Il existe un difféomorphisme formel  $\hat{\Phi}$  tel que  $\hat{\Phi}_* \hat{X} = \frac{\partial}{\partial x_1}$ . Un calcul élémentaire montre que  $\hat{\Phi}_* \hat{Y}$  s'écrit sous la forme  $\hat{a}(x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{b}(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$ , où  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  appartiennent à  $\hat{\mathcal{E}}_1$ . Soient  $a, b \in \mathcal{E}_1$  et  $\Phi \in \text{Diff}(\mathbb{R}_{,0}^2)$  des réalisations de  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  et  $\hat{\Phi}$  respectivement. En posant  $X = \Phi_*^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1}$  et  $Y = \Phi_*^{-1} (a \frac{\partial}{\partial x_1} + b \frac{\partial}{\partial x_2})$  on obtient une réalisation  $\mathcal{L} = \langle X, Y \rangle$  de  $\hat{\mathcal{L}}$  telle que  $T_0 : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  est un isomorphisme d'algèbre.

Dans la suite on supposera que tous les éléments de  $\hat{\mathcal{L}}$  sont singuliers, i.e.  $\hat{X}(0) = \hat{Y}(0) = 0$ . Comme précédemment on note  $\mathcal{L}^1$  l'algèbre des 1-jets des éléments de  $\hat{\mathcal{L}}$ ,  $\hat{a}$  et  $\hat{\beta}$  les 1-formes fermées à coefficients dans  $\hat{\mathcal{M}}_2$  définies par  $i_{\hat{X}} \hat{a} = i_{\hat{Y}} \hat{\beta} = 1$  et  $i_{\hat{X}} \hat{\beta} = i_{\hat{Y}} \hat{a} = 0$ . On note  $\hat{\mathcal{L}}^*$  l'espace vectoriel  $\hat{\mathcal{L}}^* = \hat{a}\mathbb{R} + \hat{\beta}\mathbb{R}$ . On dira que  $\hat{\mathcal{L}}$  est logarithmique si l'élément générique de  $\hat{\mathcal{L}}^*$  est logarithmique et semi-logarithmique si  $\hat{\mathcal{L}}^*$  contient une 1-forme logarithmique non triviale.

Les algèbres linéaires diagonales  $\langle x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle$  sont logarithmiques tandis que les algèbres résonnantes  $\langle qx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - px_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \hat{q}(x_1^p x_2^q) (\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}) \rangle$  sont semi-logarithmiques.

**Proposition 17.** *Soit  $\hat{\mathcal{L}} \subset \hat{\mathcal{X}}_2$  une algèbre abélienne de rang 2 telle que  $\hat{\mathcal{L}}(0) = 0$ . Si  $\hat{\mathcal{L}}$  est semi-logarithmique, alors  $\mathcal{L}^1$  est non nul. De plus  $\mathcal{L}^1$  contient un élément non nilpotent.*

*Démonstration.* On conserve les notations précédentes; supposons que  $\hat{a}$  est logarithmique et  $i_{\hat{X}} \hat{a} = 1$ . Il est plus commode de travailler avec les complexifiés  $\hat{a}_{\mathbb{C}}$  et  $\hat{X}_{\mathbb{C}}$  de  $\hat{a}$  et  $\hat{X}$  respectivement. Puisque  $\hat{a}$  est logarithmique on a  $\hat{a}_{\mathbb{C}} = \sum \lambda_i \frac{d\hat{f}_i}{\hat{f}_i} + d\hat{H}$ ,  $\hat{f}_i, \hat{H} \in \hat{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^2, 0)$ . Comme les  $\hat{f}_i$  sont irréductibles la condition  $i_{\hat{X}} \hat{a} = 1$  implique que  $\hat{X}_{\mathbb{C}}(\hat{f}_i) = \mu_i \hat{f}_i$ ,  $\mu_i \in \hat{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^2, 0)$ . On a alors  $\sum \mu_i \hat{f}_i + \hat{X}_{\mathbb{C}}(\hat{H}) = 1$  et comme  $\hat{X}_{\mathbb{C}}(0) = 0$  l'un des  $\mu_i(0)$ , disons  $\mu_1(0)$ , est non nul. La condition  $\hat{X}_{\mathbb{C}}(\hat{f}_1) = \mu_1 \hat{f}_1$  implique la non nullité de  $J^1 \hat{X}_{\mathbb{C}}$  et donc de  $J^1 \hat{X}$ . Remarquons que le premier jet non nul de  $\hat{f}_1$  est propre pour la dérivation  $J^1 \hat{X}$  avec pour valeur propre  $\mu_1(0)$  différente de 0. Par suite  $J^1 \hat{X}$  est non nilpotent.  $\square$

A conjugaison linéaire et constante multiplicative près les 1-jets des champs non nilpotents qui vont entrer en jeu sont les suivants :

- (1)  $\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$  sans résonance, i.e.  $i_1 \lambda_1 + i_2 \lambda_2 \neq \lambda_j$ ,  $j = 1, 2$ , si  $i_1$  et  $i_2$  sont des entiers tels que  $i_1 + i_2 \geq 2$ .
- (2)  $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ ,  $n \geq 2$  (Poincaré-Dulac).
- (3)  $qx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - px_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}^*$ ,  $\langle p, q \rangle = 1$  (hyperbolique résonnante de type  $(p, q)$ ).
- (4)  $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$ .
- (5)  $(\alpha x_1 + \beta x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (-\beta x_1 + \alpha x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$ ,  $\alpha \neq 0$ .
- (6)  $x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$  (elliptique).
- (7)  $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$  (noeud-col).

Les 1-jets de type 1, 4, et 5 sont 1-déterminants, i.e. si  $\hat{X}$  a son 1-jet de type 1, 4 ou 5 alors  $\hat{X}$  est formellement conjugué à sa partie linéaire  $X_1 = J^1 \hat{X}$ . De plus un champ  $\hat{Y}$  commutant avec  $X_1$  est linéaire. En utilisant la liste précédente et la décomposition de Jordan des champs de vecteurs formels en parties semi-simple et nilpotente [3], [6] on établit sans peine la :

**Proposition 18.** Soit  $\hat{\mathcal{L}} \subset \hat{\mathcal{X}}_2$  une sous algèbre commutative de rang 2,  $\hat{\mathcal{L}}(0) = \{0\}$ . Si  $\hat{\mathcal{L}}$  est semi-logarithmique alors, à conjugaison par un élément de  $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0^2)$  près,  $\hat{\mathcal{L}}$  appartient à la liste suivante :

- (1)  $\langle x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle$
- (2)  $\langle x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + nx_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, x_1^n \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle$ , où  $n \geq 2$ .
- (3)  $\langle qx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - px_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \hat{a}(x_1^p x_2^q)(\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}) \rangle$ ,  $\hat{a} \in \mathfrak{M}_1 \cdot \hat{\mathcal{E}}_1$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .
- (4)  $\langle x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle$ .
- (5)  $\langle x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle$
- (6)  $\langle x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \alpha \hat{a}(x_1^2 + x_2^2)(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}) + \beta \hat{a}(x_1^2 + x_2^2)(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}) \rangle$ , où  $\hat{a} \in \mathfrak{M}_1 \cdot \hat{\mathcal{E}}_1$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- (7)  $\langle x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \hat{a}(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle$ , où  $\hat{a} \in \mathfrak{M}_1^2 \cdot \hat{\mathcal{E}}_1$

Remarquons que les algèbres de type 1 et 5 sont logarithmiques et les autres sont semi-logarithmiques. On constate ainsi que logarithmique implique linéarisable. Les algèbres de type 4 sont de type 2 lorsque  $n = 1$ , mais sont linéarisables. On peut en fait donner des formes normales plus précises pour les  $\hat{a}$ ,  $\hat{l}_1$  et  $\hat{l}_2$ , mais ceci ne sera pas utile ( $\hat{a}(t) = \frac{t^{s+1}}{1-\lambda t^s}$ ,  $s \in \mathbb{N}^*$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ). On déduit de tout cela le :

**Théorème 19.** Soit  $\hat{\mathcal{L}} \subset \hat{\mathcal{X}}_2$  une sous algèbre abélienne de rang 2. Il existe une réalisation  $\mathcal{C}^\infty$   $\mathcal{L}$  de  $\hat{\mathcal{L}}$  telle que  $T_0 : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$  soit un isomorphisme dans les deux cas suivants :

- (1)  $\hat{\mathcal{L}}(0) \neq 0$ .
- (2)  $\hat{\mathcal{L}}(0) = 0$  et  $\hat{\mathcal{L}}$  est semi-logarithmique.

*Démonstration.* Soit  $\hat{\Phi}$  un élément de  $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0^2)$  tel que  $\hat{\Phi}_* \hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_0$  soit comme dans la Proposition 18. Si  $\hat{\mathcal{L}}_0$  est de type 3, 5, 6 ou 7 on choisit une réalisation  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $a \in \mathfrak{M}_1 \mathcal{E}_1$ , de  $\hat{a}$ . On construit ainsi des algèbres  $\mathcal{L}_0$ , réalisations  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\hat{\mathcal{L}}_0$ . La sous algèbre  $\mathcal{L} = \Phi_* \mathcal{L}_0$ , où  $\Phi$  est une réalisation de  $\hat{\Phi}$ , satisfait le théorème.  $\square$

**Remarque 20.** Nous n'avons pas abordé ici le cas général non semi-logarithmique pour lequel il n'y a pas à notre connaissance de modèles comme dans la Proposition 18.

## 2. EQUATIONS IMPLICITES

Rappelons les définitions et propriétés des idéaux fermés de  $\mathcal{E}_n$ , afin d'énoncer le principal résultat de J. C. Tougeron [20] et [21], que nous utiliserons. Nous conservons ses notations. Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{E}(\Omega)$  l'algèbre des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur  $\Omega$  muni de sa structure classique d'espace de Frechet. Etant donné  $\underline{a} \in \Omega$  et  $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$  on note  $T_{\underline{a}}\varphi$  le développement en série formelle de  $\varphi$  en  $\underline{a}$ . Si  $I$  est un idéal, on note  $T_{\underline{a}}I = \{T_{\underline{a}}\varphi / \varphi \in I\} \subset \hat{\mathcal{E}}_n$ . On dira que  $I$  est fermé si c'est un fermé de  $\mathcal{E}(\Omega)$  muni de sa structure d'espace de Frechet. Nous avons le résultat suivant, dû à Whitney, qui caractérise les idéaux fermés de  $\mathcal{E}(\Omega)$  :

**Théorème 21.** [20], [11] Un idéal  $I$  de  $\mathcal{E}(\Omega)$  est fermé si et seulement si pour tout  $\varphi$  appartenant à  $\mathcal{E}(\Omega)$  tel que  $T_{\underline{a}}\varphi \in T_{\underline{a}}I$  pour tout  $\underline{a}$  élément de  $\Omega$ , alors  $\varphi$  appartient à  $I$ .

Hörmander a montré que l'idéal  $\varphi\mathcal{E}(\Omega)$  est fermé lorsque  $\varphi$  est un polynôme. Lojasiewicz a montré le même résultat sous l'hypothèse que  $\varphi$  est analytique sur  $\Omega$ . Plus généralement Malgrange a prouvé que :

**Théorème 22.** [11], [20] Soient  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  des fonctions analytiques sur  $\Omega$  et  $\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$  l'idéal engendré par  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ , alors  $\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$  est fermé.

La notion d'idéaux fermés se généralise à ceux de  $\mathcal{E}_n$  de type fini.

**Définition 23.** Soit  $I = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_p \rangle$  un idéal de  $\mathcal{E}_n$ . On dit que  $I$  est fermé s'il existe un voisinage  $\Omega$  de  $\underline{0}$  et des représentants  $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_p$  de  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  respectivement tels que  $\langle \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_p \rangle$  soit fermé dans  $\mathcal{E}(\Omega)$ .

Voici un exemple d'idéal non fermé donné par Tougeron [20] :

**Exemple 24.** La fonction  $f^+ = y^2 + \exp(-\frac{1}{x^2})$  n'engendre pas un idéal fermé. En effet  $\forall \underline{a} \in \mathbb{R}^2$ ,  $T_{\underline{a}} \exp(-\frac{1}{x^2}) \in T_{\underline{a}}(f^+ \mathcal{E}(\mathbb{R}^2))$ , cependant  $\exp(-\frac{1}{x^2})$  n'appartient pas à  $f^+ \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ .

**Définition 25.** Soit  $I = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_p \rangle$  l'idéal de  $\mathcal{E}(\Omega)$  engendré par  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ . On appelle module des relations de  $I$  le  $\mathcal{E}(\Omega)$ -module  $\{(h_1, \dots, h_p) / h_i \in \mathcal{E}(\Omega), \sum_{i=1}^p h_i \varphi_i = 0\}$ .

On a le résultat remarquable suivant, dû à Malgrange :

**Théorème 26.** Soit  $I = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_p \rangle$  un idéal de  $\mathcal{E}_n$ ,  $\hat{h}_1, \dots, \hat{h}_p$  des éléments de  $\hat{\mathcal{E}}_n$  tels que  $\sum_{i=1}^p \hat{h}_i T_{\underline{0}} \varphi_i = 0$ . Si  $I$  est fermé, alors il existe des éléments  $h_1, \dots, h_p$  de  $\mathcal{E}_n$  tels que  $\sum_{i=1}^p h_i \varphi_i = 0$ .

Rappelons dans le même ordre d'idée le célèbre résultat d'approximation d'Artin [1] :

**Théorème 27.** Soit  $F$  un germe d'application holomorphe à l'origine de  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ . On considère l'équation implicite :

$$(10) \quad F(x, y) = 0$$

où  $x$  appartient à  $\mathbb{C}^n$  et  $y$  à  $\mathbb{C}^p$ . Si (10) possède une solution formelle  $\hat{y} \in \hat{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^n, 0)^p$  et  $k \in \mathbb{N}$  est fixé, alors il existe une solution convergente  $y_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)^p$  de (10) telle que le jet d'ordre  $k$  de  $y_k$  vérifie  $J^k y_k = J^k \hat{y}$ .

Cet énoncé possède une version analytique réelle qui a été complétée comme suit par J. C. Tougeron [22] :

**Théorème 28.** Soient  $F$  un germe d'application analytique à l'origine de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  et  $\hat{y} \in \hat{\mathcal{E}}_n^p$  une solution formelle de l'équation implicite (10). Il existe un germe d'application  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $y \in \mathcal{E}_n^p$  vérifiant :  $F(x, y) = 0$  et  $T_{\underline{0}} y = \hat{y}$ .

On considère maintenant la donnée d'une équation implicite "complètement formelle"

$$(11) \quad \hat{F}(x, y) = 0$$

avec  $\hat{F} \in \hat{\mathcal{E}}_{n+p}^l$ . On suppose qu'il existe une solution formelle  $\hat{y} \in \hat{\mathcal{E}}_n^p$  de (11) :  $\hat{F}(x, \hat{y}) = 0$ . On se demande s'il existe  $F \in \mathcal{E}_{n+p}^l$  et  $y \in \mathcal{E}_n^p$  tels que  $F(x, y(x)) = 0$ ,  $T_{\underline{0}} F = \hat{F}$  et  $T_{\underline{0}} y = \hat{y}$ . Si  $\hat{F}$  dépend effectivement de  $x$ , i.e.  $\frac{\partial \hat{F}}{\partial x_i} \neq 0$  pour un certain indice  $i$ , la solution est simple. On se donne une réalisation  $\tilde{F}$  de  $\hat{F}$  et une réalisation  $x \mapsto y(x)$  de  $\hat{y}$ . L'application  $x \mapsto \tilde{F}(x, y(x)) = a(x)$  est plate à l'origine, au sens où chaque composante  $a_i$  de  $a$  est plate. On pose alors  $F(x, y) = \tilde{F}(x, y) - a(x)$ ; visiblement  $T_{\underline{0}} F = \hat{F}$  et  $F(x, y(x)) = 0$ . Lorsque  $\hat{F} = \hat{F}(y)$  ne dépend pas de  $x$  et que l'on dispose d'une solution formelle  $\hat{y}(x) : \hat{F}(\hat{y}(x)) = 0$ , le problème semble délicat. En petite dimension ( $n = p = l = 1$ ) on obtient le résultat suivant :

**Théorème 29.** Soient  $\hat{F} \in \hat{\mathcal{E}}_2$  et  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2) \in \hat{\mathcal{E}}_1^2$  une solution paramétrique de  $\hat{F} = 0$ , i.e.  $\hat{F}(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = 0$ . Il existe  $F \in \mathcal{E}_2$  et  $(y_1, y_2) \in \mathcal{E}_1^2$  satisfaisant

$$F(y_1, y_2) = 0, \quad T_{\underline{0}} F = \hat{F}, \quad \text{et} \quad T_{\underline{0}}(y_1, y_2) = (\hat{y}_1, \hat{y}_2).$$



*Démonstration.* On suppose que  $\hat{F}$  et  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$  sont non constants. Le Théorème 4.4 de D. Cerveau et J.F. Mattei [6] dit qu'il existe un difféomorphisme formel  $\hat{\Phi} \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_{\underline{0}}^2)$  tel que  $\hat{F} \circ \hat{\Phi} = P$  soit un polynôme. Si  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$  est une solution de  $\hat{F} = 0$ , alors  $(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2) = \hat{\Phi}^{-1}(\hat{y}_1, \hat{y}_2) \in \hat{\mathcal{E}}_1^2$  est solution de  $P(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2) = 0$ . Le théorème de Tougeron assure qu'il existe une solution  $(Y_1, Y_2) \in \mathcal{E}_1^2$  à  $P(Y_1, Y_2) = 0$  avec  $T_{\underline{0}}(Y_1, Y_2) = (\hat{Y}_1, \hat{Y}_2)$ . Soit  $\Phi$  une réalisation  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\hat{\Phi}$ . On vérifie que  $F = P \circ \Phi^{-1}$  et  $(y_1, y_2) = \Phi(Y_1, Y_2)$  satisfont l'énoncé du théorème.  $\square$

**Conjecture.** *Le problème précédent a une réponse positive en toute généralité.*

Un résultat classique de Malgrange [11] assure qu'un champ de vecteurs analytique  $X \in \mathcal{X}_2$ , possédant une intégrale première formelle  $\hat{X}$  non constante, en possède une analytique. Ce résultat ne persiste pas en classe  $\mathcal{C}^\infty$ . En effet soit

$$X = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \exp \frac{-1}{x_1^2 + x_2^2} (x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}).$$

Il possède l'intégrale première formelle  $x_1^2 + x_2^2$  (i.e.  $T_{\underline{0}}X(x_1^2 + x_2^2) = 0$ ) mais il ne possède aucune intégrale première  $\mathcal{C}^\infty$  non constante. La raison est que toutes les trajectoires de  $X$  adhèrent au point singulier  $\underline{0}$  (spirales). Par contre on a l'énoncé suivant, toujours propre à la dimension deux :

**Théorème 30.** *Soient  $\hat{X}$  et  $\hat{F}$  deux éléments de  $\hat{\mathcal{X}}_2$  et  $\hat{\mathcal{E}}_2$  respectivement. On suppose que  $\hat{F}$  est une intégrale première non constante de  $\hat{X}$  ( $\hat{X} \cdot \hat{F} = 0$ ). Il existe  $X \in \mathcal{X}_2$  et  $F \in \mathcal{E}_2$  tels que  $X \cdot F = 0$ ,  $T_{\underline{0}}X = \hat{X}$  et  $T_{\underline{0}}F = \hat{F}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\hat{\Phi} \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_{\underline{0}}^2)$  un difféomorphisme formel tel que  $\hat{F} \circ \hat{\Phi} = P$  soit un polynôme. Le champ  $\hat{Y} = \hat{\Phi}_*^{-1} \hat{X} = \sum \hat{Y}_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  a  $P$  pour intégrale première :

$$\sum \hat{Y}_j \frac{\partial P}{\partial x_j} = 0$$

cette égalité peut être interprétée comme une relation linéaire entre les polynômes  $\frac{\partial P}{\partial x_j}$ . Le Théorème 29 produit un champ de vecteurs  $Y = \sum Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tel que  $Y \cdot P = 0$  et  $T_{\underline{0}}Y = \hat{Y}$ . Soit  $\Phi$  une réalisation de Borel de  $\hat{\Phi}$ ; le champ  $X = \Phi_* Y$  et la fonction  $F = P \circ \Phi^{-1}$  conviennent.  $\square$

Dans le même ordre d'idée le problème des séparatrices a été considéré par plusieurs auteurs notamment Dumortier [8], Roussarie [18] [10], ... etc. Soit  $X$  un champ de vecteur  $\mathcal{C}^\infty$  à l'origine  $\underline{0}$  de  $\mathbb{R}^2$  à singularité algébriquement isolée,  $T_{\underline{0}}X = \hat{X}$  son jet de Taylor en  $\underline{0}$  et

$$\omega = i_X dx_1 \wedge dx_2 \in \Omega_{\underline{0}}^1.$$

Une séparatrice formelle de  $X$  (ou de  $\omega$ ) est une courbe paramétrée formelle

$$\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) \in \hat{\mathcal{E}}_1^2,$$

non constante telle que  $\hat{\gamma}(0) = \underline{0}$  et  $\hat{\gamma}^* \omega = 0$ . Le théorème de réduction des singularités de Seidenberg [14] ajouté à l'étude locale des singularités apparaissant en fin de processus de réduction permet d'établir avec les notations précédentes le :

**Théorème 31.** *Soient  $X$  un champ de vecteur  $\mathcal{C}^\infty$ , à singularité isolée à l'origine de  $\mathbb{R}^2$  et  $\hat{\gamma}$  une séparatrice formelle non triviale de  $X$ . Il existe une séparatrice  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $\gamma \in \mathcal{E}_1^2$  de  $X$  réalisant  $\hat{\gamma} : T_{\underline{0}}\gamma = \hat{\gamma}$  et  $\gamma^* \omega = 0$ .*

Faisons quelques commentaires sur l'énoncé ci-dessus. Pour une telle courbe  $\gamma$ , il existe  $F \in \mathcal{E}_2$ , irréductible à singularité algébriquement isolée telle que  $F^{-1}(0)$  soit égale à l'image de  $\gamma$ . En effet il existe  $\hat{F} \in \hat{\mathcal{E}}_2$ , à singularité algébriquement isolée telle que  $\hat{F} \circ \hat{\gamma} = 0$ . La paramétrisation est à reparamétrisation près par un élément  $\hat{\tau} \in \hat{\mathcal{E}}_1$ ,  $\hat{\gamma} = \hat{\delta} \circ \hat{\tau}$  l'unique courbe formelle vérifiant cela. D'un autre côté  $\hat{\gamma}$  étant fixé l'idéal  $\langle \hat{F} \rangle$  engendré par  $\hat{F}$  est intrinsèque. Soit  $F'$  une réalisation  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\hat{F}$ . Le morphisme  $\pi$  de résolution des singularités de  $\hat{\gamma}$  (qui est également celui de  $\hat{F}$ ) fait que  $(F' \circ \pi = 0)$  est une courbe à croisements normaux. Soient  $\gamma'$  défini par  $\pi \circ \gamma' = \gamma$ . On peut modifier localement  $F' \circ \pi$  par composition à droite par un germe de difféomorphisme  $\varphi$ , plat à l'identité le long du diviseur  $\pi^{-1}(\underline{0})$  de sorte que  $F' \circ \pi \circ \varphi$  s'annule précisément sur  $\gamma$  ( $F' \circ \pi \circ \varphi \circ \gamma' \equiv 0$ ). La fonction  $F$  définie par  $F \circ \pi = F' \circ \pi \circ \varphi$  est  $\mathcal{C}^\infty$ , en dehors de l'origine, et  $(F - F') \circ \pi$  est plat le long de  $\pi^{-1}(\underline{0})$ . Il en résulte que  $F$  s'étend de manière  $\mathcal{C}^\infty$  en  $\underline{0} \in \mathbb{R}^2$ .

**Conjecture.** Soient  $X$  un germe de champ de vecteurs  $\mathcal{C}^\infty$  à l'origine de  $\mathbb{R}^n$ , à singularité algébriquement isolée et possédant une courbe formelle invariante  $\hat{\gamma} \in \hat{\mathcal{E}}_1^n$ . Alors il existe  $\gamma \in \mathcal{E}_1^n$  tel que  $T_{\underline{0}}\gamma = \hat{\gamma}$  et  $\gamma$  est une courbe invariante de  $X$ .

Le contre-exemple à l'existence d'intégrale première  $\mathcal{C}^\infty$  en présence d'intégrale première formelle est dû au phénomène de spiralement. La présence de séparatrice formelle (et donc  $\mathcal{C}^\infty$ ) interdit ce spiralement. R. Roussarie [18] a démontré que si le champ  $\mathcal{C}^\infty$   $X$ , à singularité isolée à l'origine de  $\mathbb{R}^2$ , possède une séparatrice formelle et une intégrale première formelle  $\hat{F}$  (ce qui revient à demander que les zéros formels de  $\hat{F}$  soient non réduits à  $\{\underline{0}\}$ ), alors  $X$  possède une intégrale première  $F$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , non plate. On peut préciser cet énoncé pour obtenir la condition  $T_{\underline{0}}F = \hat{F}$  (en travaillant sur les intégrales premières minimales formelles pour le voir).

Soit  $S$  une séparatrice du champ  $X$ , à singularité isolée à l'origine de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $S$  est définie par  $(F = 0)$ , où  $F \in \mathcal{E}_2$  est à singularité isolée, alors  $X.F$  est divisible par  $F$ , i.e.  $X.F = g.F$  pour un certain  $g \in \mathcal{E}_2$ . De façon duale, si  $\omega$  est une 1-forme duale de  $X$ , alors  $\omega \wedge dF = F.\eta$  pour une certaine 2-forme  $\eta$ . Si l'on considère le champ  $X = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \exp \frac{-1}{x_1^2 + x_2^2} (x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2})$  on constate que  $X.(x_1^2 + x_2^2) = -2(x_1^2 + x_2^2) \exp \frac{-1}{x_1^2 + x_2^2}$ .

On dira que  $F \in \mathcal{E}_2$ , à singularité isolée, est une séparatrice elliptique du champ  $X$  si  $X.F$  est divisible par  $F$  et  $(F = 0)$  se réduit à  $\{\underline{0}\}$  :  $X.F = g.F$  et  $F^{-1}(0) = \{\underline{0}\}$ . Lorsque  $g$  lui-même est elliptique, i.e.  $g^{-1}(0) = \{\underline{0}\}$ , alors  $F$  est une fonction de Lyapounov pour  $X$  ; dans ce cas toutes les trajectoires du champ  $X$  adhèrent à l'origine. On a une notion formelle analogue. Soit  $\hat{X}$  un champ formel à singularité isolée et  $\hat{F} \in \hat{\mathcal{E}}_2$  également à singularité isolée. Alors  $\hat{F}$  définit une séparatrice formelle elliptique de  $\hat{X}$  si  $\hat{X}.\hat{F}$  est divisible par  $\hat{F}$  ( $\hat{X}.\hat{F} = \hat{g}.\hat{F}$  où  $\hat{g} \in \hat{\mathcal{E}}_2$ ) et  $\hat{F}^{-1}(0) = \{\underline{0}\}$  au sens où  $\hat{F}(\underline{0}) = 0$  et pour tout chemin formel  $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)$ ,  $\hat{\gamma}_i \in \hat{\mathcal{E}}_1$ , tel que  $\hat{F} \circ \hat{\gamma} \equiv 0$  ; alors  $\hat{\gamma}$  est le chemin "constant"  $\hat{\gamma}(t) \equiv 0$ .

**Proposition 32.** Soient  $\hat{X}$  un champ formel et  $\hat{F}$  une séparatrice formelle elliptique de  $\hat{X}$ . Il existe des réalisations  $X$  et  $F$  de  $\hat{X}$  et  $\hat{F}$  respectivement telles que  $F$  soit une séparatrice  $\mathcal{C}^\infty$  et elliptique de  $X$ .

*Démonstration.* Soit  $\hat{\Phi} \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_{\underline{0}}^2)$  tel que  $\hat{F} \circ \hat{\Phi} = P$  soit un polynôme. On se ramène donc à  $\hat{X}'.P = P.\hat{g}$ , où  $\hat{X}'$  est le transformé de  $\hat{X}$  par  $\hat{\Phi}$ . Le théorème de Briançon et Skoda [2] affirme que  $P^2$  appartient à son idéal Jacobien (ceci dans la classe analytique). Ce qui s'interprète comme suit : il existe un champ de vecteur analytique  $Y$  tel que  $P^2 = Y.P$ . Notons que

$$\hat{X}.P^2 = 2P^2\hat{g} = 2\hat{g}.Y.P.$$

Par suite :  $(2\hat{g}Y - 2P\hat{X}').P = 0$  qui s'écrit avec des notations évidentes sous forme :

$$2\hat{g}(Y_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial P}{\partial x_2}) - 2P \frac{\partial P}{\partial x_1} \cdot \hat{X}'_1 - 2P \frac{\partial P}{\partial x_2} \cdot \hat{X}'_2 = 0$$

que l'on peut voir comme une équation linéaire en les inconnues  $g$ ,  $X'_1$  et  $X'_2$  ayant une solution formelle  $\hat{g}$ ,  $\hat{X}'_1$  et  $\hat{X}'_2$ . Suivant Malgrange il existe des réalisations  $\mathcal{C}^\infty$   $g$ ,  $X'_1$  et  $X'_2$  telle que  $(2gY - 2PX').P = 0$  avec  $X' = X'_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X'_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ . On en déduit que  $X'.P = gP$ . On choisit une réalisation de Borel de  $\hat{\Phi}$ ; le transformé  $X$  de  $X'$  par  $\Phi^{-1}$  et  $F = P \circ \Phi^{-1}$  sont des réalisations de  $\hat{X}$  et  $\hat{F}$  qui conviennent.  $\square$

### 3. PROBLÈMES MIXTES

**3.1. Le cas des groupes.** Etant donné un sous groupe  $\hat{G} \subset \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0^n)$  de difféomorphismes formels, on cherche un sous groupe  $G \subset \text{Diff}(\mathbb{R}_0^n)$  de difféomorphismes  $\mathcal{C}^\infty$  tels que l'application  $T_0 : G \rightarrow \hat{G}$  soit un isomorphisme. Nous ne savons pas répondre à cette question en toute généralité, mais voici quelques exemples où la réponse est positive.

**3.1.1. Le cas des sous groupes libres.** Considérons un groupe libre engendré par des éléments  $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0^n)$ . Si  $f_1, \dots, f_m$  sont des réalisations quelconques de  $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m$  respectivement ( $T_0 f_k = \hat{f}_k$ ), alors le groupe  $G$  engendré par les  $f_k$  est libre. En effet si  $M(f_1, \dots, f_m) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$  est un mot réduit en les  $f_k$  égal à l'identité, alors  $M(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$  et le mot est donc trivial. C'est donc un fait élémentaire qui fait que  $T_0 : G \rightarrow \hat{G}$  soit un isomorphisme.

**3.1.2. Le cas des produits libres de groupes finis.** On se donne un sous groupe

$$\hat{G} = \hat{G}_1 * \dots * \hat{G}_m \subset \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0^n),$$

produit libre d'un nombre fini de sous groupes finis  $\hat{G}_k \subset \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0^n)$ . Rappelons que tout sous groupe fini de  $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0^n)$  est conjugué à sa partie linéaire. Pour chacun des groupes  $G_k$  il existe  $\hat{\Phi}_k \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0^n)$  tels que  $\hat{G}_k = \hat{\Phi}_k \circ G_k^1 \circ \hat{\Phi}_k^{-1}$ , où  $G_k^1$  est le sous groupe linéaire des 1-jets de  $\hat{G}_k$ . Si les  $\Phi_k$  sont des réalisations des  $\hat{\Phi}_k$  on considère les sous groupes  $G_k = \Phi_k \circ G_k^1 \circ \Phi_k^{-1}$ . Soit  $G$  le groupe engendré par les  $G_k$ . Par construction le morphisme  $T_0 : G \rightarrow \hat{G}$  est surjectif et le groupe  $G$  est le produit libre des groupes  $G_k$ . Par suite  $T_0 : G \rightarrow \hat{G}$  est un isomorphisme. Ce résultat se généralise au cas où  $\hat{G}$  est le produit libre de groupes linéarisables  $\hat{G}_k$ ; la démarche est analogue à celle qui précède : on choisit des réalisations  $\Phi_k$  des  $\hat{\Phi}_k$  et l'on introduit les groupes  $G_k = \Phi_k \circ G_k^1 \circ \Phi_k^{-1}$ , où  $G_k^1$  est le groupe linéaire  $J^1 \hat{G}_k$ . Le groupe  $G$  engendré par les  $G_k$  est le produit libre  $G_1 * \dots * G_m$  et  $T_0 : G \rightarrow \hat{G}$  est un isomorphisme.

En dimension 1 la classification des sous groupes résolubles de difféomorphisme formels est bien connue et fait partie du folklore [5]. En fait tout sous groupe  $\hat{G} \subset \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0)$ , résoluble, est formellement conjugué à un sous groupes de difféomorphismes analytique. On en déduit le :

**Théorème 33.** *Soit  $\hat{G} \subset \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0)$  un sous groupe résoluble ; il existe un sous groupe  $G \subset \text{Diff}(\mathbb{R}_0)$  tel que  $T_0 G = \hat{G}$  et  $T_0 : G \rightarrow \hat{G}$  soit un isomorphisme.*

Voici encore un cas spécial qui s'applique en particulier aux représentations des groupes de surfaces dans  $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0^2)$ . On se donne des difféomorphismes formels  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_p \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0^2)$  satisfaisant la relation :

$$\hat{a}\hat{b}\hat{a}^{-1} = \mathcal{R}(\hat{b}, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_p)$$

où  $\mathcal{R}$  est un mot en les  $\hat{b}, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_p$ . Une telle relation indique que  $\hat{b}$  est conjugué à  $\mathcal{R}(\hat{b}, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_p)$  par le difféomorphisme formel  $\hat{a}$ . Soit  $b_1 = J^1 \hat{b}$  la partie linéaire de  $\hat{b}$ ; nous supposons  $b_1$  semi-simple et hyperbolique. Ceci signifie que si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont les valeurs propres (complexes) de  $b_1$  alors aucun des  $\lambda_j$  n'est imaginaire pur.

**Proposition 34.** *Sous les hypothèses précédentes il existe  $a, b, c_1, \dots, c_p \in \text{Diff}(\mathbb{R}_0^n)$  réalisations  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_p$  et satisfaisant à la relation :*

$$aba^{-1} = \mathcal{R}(b, c_1, \dots, c_p).$$

*Démonstration.* Soient  $b, c_1, \dots, c_p$  des réalisations  $\mathcal{C}^\infty$  des difféomorphismes formels  $\hat{b}, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_p$ . Les difféomorphismes  $b$  et  $\mathcal{R}(b, c_1, \dots, c_p)$  sont formellement conjugués. Comme  $b$  est hyperbolique ils sont  $\mathcal{C}^\infty$  conjugués par un difféomorphisme  $a$  ayant  $\hat{a}$  comme jet infini; c'est le Théorème de linéarisation de Sternberg [16], [17].  $\square$

En dimension 1, il y a un résultat de normalisation dû à F. Takens [19] :

**Théorème 35.** *Soit  $f \in \text{Diff}(\mathbb{R}_0)$  un germe de difféomorphisme  $\mathcal{C}^\infty$ . On suppose que  $f - \text{Id}_{\mathbb{R}}$  n'est pas plat :  $f - \text{Id}_{\mathbb{R}} \notin \mathcal{M}_1^\infty$ . Alors si  $g \in \text{Diff}(\mathbb{R}_0)$  est formellement conjugué à  $f$  par  $\hat{h}$  :*

$$\hat{g} = \hat{h} \circ \hat{f} \circ \hat{h}^{-1}$$

*il existe  $h \in \text{Diff}(\mathbb{R}_0)$  tel que  $T_0 h = \hat{h}$  et  $g = h \circ f \circ h^{-1}$ .*

Ceci permet d'avoir une variante de l'énoncé précédent.

**Proposition 36.** *Soient  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_p$  des éléments non triviaux de  $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0)$  satisfaisant une relation du type :*

$$\hat{a}\hat{b}\hat{a}^{-1} = \mathcal{R}(\hat{b}, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_p).$$

*Il existe des réalisations  $\mathcal{C}^\infty$  des  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}_j$  satisfaisant la même relation.*

**Remarque 37.** *Cet énoncé s'applique en particulier aux représentations  $\hat{\rho} : G_n \rightarrow \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0)$  du groupe fondamental  $G_n$  de la surface de genre  $n$ . Un tel  $\hat{\rho}$  possède une réalisation  $\mathcal{C}^\infty$*

$$\rho : G_n \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}_0).$$

Les exemples précédents conduisent à la :

**Conjecture.** *Soit  $\hat{G} \subset \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}_0^n)$  un sous groupe de difféomorphismes formels. Il existe une réalisation  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $G \subset \text{Diff}(\mathbb{R}_0^n)$  de  $\hat{G}$  telle que  $T_0 : G \rightarrow \hat{G}$  soit un isomorphisme.*

**3.2. Feuilletages de codimension 1.** Considérons  $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}_n^1$ ,  $n \geq 3$ , une 1-forme formelle intégrable ( $\hat{\omega} \wedge d\hat{\omega} = 0$ ) à singularité algébriquement isolée; i.e. si  $\hat{\omega} = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i dx_i$ ,  $\hat{a}_i \in \hat{\mathcal{E}}_n$ , alors le quotient  $\hat{\mathcal{E}}_n / (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n)$  est de dimension finie. Le Théorème de Malgrange formel (dû en fait à J. Martinet) assure l'existence d'une intégrale première formelle  $\hat{f} : \hat{\omega} = \hat{g}d\hat{f}$  avec  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  appartenant à  $\hat{\mathcal{E}}_n$ . En fait il suffit qu'il existe une immersion  $i : \mathbb{R}_0^3 \rightarrow \mathbb{R}_0^n$  d'un trois plan tel que  $i^*\hat{\omega}$  soit à singularité isolée pour arriver à la même conclusion. Soient  $f$  et  $g$  des réalisations  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  respectivement. La 1-forme  $\omega = gdf$  est intégrable et satisfait  $T_0\omega = \hat{\omega}$ . Dans la description des singularités analytiques des feuilletages de codimension 1 apparaît naturellement les feuilletages obtenus par image réciproque de feuilletages en petite dimension par un morphisme. Il en est ainsi pour les "phénomènes de Kupka" [6]. Si  $\hat{\omega}_0 \in \Omega_2^1$  définit un feuilletage formel de  $\mathbb{R}_0^2$  et si  $\hat{F} = (\hat{F}_1, \hat{F}_2) \in \hat{\mathcal{E}}_n^2$  est un morphisme formel de  $\mathbb{R}_0^n$  dans  $\mathbb{R}_0^2$ , alors  $\hat{F}^*\hat{\omega}_0$  définit un feuilletage

formel de  $\mathbb{R}_0^n$ . Si  $F$  et  $\omega_0$  sont des réalisations  $C^\infty$  de  $\hat{F}$  et  $\hat{\omega}_0$ , alors  $\omega = F^*\omega_0$  est une réalisation  $C^\infty$  intégrable de  $\hat{\omega}$ .

D'autres feuilletages apparaissant dans la classification abondent dans le sens précédent. Par exemple soit  $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}_n^1$  de type "logarithmique"  $\hat{\omega} = \hat{f}_1 \dots \hat{f}_p \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{d\hat{f}_i}{\hat{f}_i}$  où  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  et  $\hat{f}_i \in \hat{\mathcal{E}}_n$ . Si les  $f_i \in \mathcal{E}_n$  sont des réalisations  $C^\infty$  des  $\hat{f}_i$ , alors  $\omega = f_1 \dots f_p \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$  est une réalisation  $C^\infty$  intégrable de  $\hat{\omega}$ . Ici encore nous proposons la conjecture :

**Conjecture.** Soit  $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}_n^1$  une 1-forme formelle intégrable. Il existe  $\omega \in \Omega_n^1$  intégrable telle que  $T_0\omega = \hat{\omega}$ .

#### RÉFÉRENCES

- [1] M. Artin : On the solutions of analytic equations. *Inventiones Math.* 5, 196, pages 543-572, 1995.
- [2] J. Briançon, H. Skoda : Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de  $\mathbb{C}^n$ . *C. R. Acad. Sc. Paris*, Tome 278, 1974.
- [3] N. Bourbaki : *Groupes et Algèbres de Lie*, Masson, 1981.
- [4] C. Camacho, P. Sad : Invariant varieties through singularities of vector fields. *Ann. of Math.*, 2, 115, N°3, 1982.
- [5] D. Cerveau, R. Moussu : Groupes d'automorphismes de  $(\mathbb{C}, 0)$  et équations différentielles  $ydy + \dots = 0$ . *Bull. Soc. Math. France*, 116, 1988, pages 459-488. DOI: [10.24033/bsmf.2108](https://doi.org/10.24033/bsmf.2108)
- [6] D. Cerveau, J.-F. Mattei : *Formes intégrables holomorphes singulières*. Astérisque 97, Soc. Math. France, 1982.
- [7] J. Draisma : Lie algebras of vector fields. Thesis Eindhoven 2002, 121 pages. ISBN 978-9037, 60552-1. Proquest LLC.
- [8] F. Dumortier. Singularities of vector fields on the plane. *J. Differential Equations* 23, N°1, 1977, pages 53-106.
- [9] R. Hermann : Formal linearization of vector fields and related cohomology 1. 2. *J. Differential Geometry* 8, pages 1-14, 1973 *Ibid.* 8, pages 15-24, 1973.
- [10] A. Kelley : The stable, center-stable, center-unstable and unstable manifolds. Publié en Appendice C dans R. Abraham and J. Robbin : *Transversal mappings and flows*. Benjamin, New-York, 1967.
- [11] B. Malgrange : Idéaux de fonctions différentiables et division des distributions. 121, Ed. Ec. Polytech., Palaiseau, 2003.
- [12] B. Malgrange : Frobenius avec singularités 1, codimension 1. *Publ. Math. I.H.E.S.*, Vol. 46, 1976, pages 163-173. DOI: [10.1007/BF02684321](https://doi.org/10.1007/BF02684321)
- [13] J. Martinet : Normalisation des champs de vecteurs holomorphes. *Seminaire N. Bourbaki N°564*, 1980-1981, pages 55-70.
- [14] J. F. Mattei, R. Moussu : Holonomie et intégrales premières. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 13; N°4, 1980, pages 469-523.
- [15] R. Moussu : Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, Tome 26, N°2, 1976, pages 171-220.
- [16] S. Sternberg : Local contractions and a theorem of Poincaré. *Amer. J. Math.*, 79, 1957, pages 809-824. DOI: [10.2307/2372437](https://doi.org/10.2307/2372437)
- [17] S. Sternberg : On the structure of local homeomorphisms of euclidean  $n$  - space. 2. *Amer. J. Math.*, 80, 1958, pages 623-631. DOI: [10.2307/2372774](https://doi.org/10.2307/2372774)
- [18] R. Roussarie : Modèles locaux de champs et de formes. *Astérisque* 30, Soc. Math. France, 1975.
- [19] F. Takens : Normal forms for certain singularities of vector fields. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, Tome 23, N°8, 1973, pages 163-195.
- [20] J.-C. Tougeron : Idéaux de fonctions différentiables 1. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, Tome 18, N°1, 1968, pages 177-240.
- [21] J.-C. Tougeron, J. Merrien : Idéaux de fonctions différentiables 2. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, Tome 20, N°1, 1970, pages 179-233.
- [22] J.-C. Tougeron : Solutions d'un système d'équations analytiques réelles. *Inst. Fourier, Grenoble*, Tome 26, N°3, 1976, pages 109-135.

D. CERVEAU, UNIVERSITÉ DE RENNES1, IRMAR, CNRS UMR 6625, CAMPUS DE BEAULIEU, BÂT. 22-23,  
F-35042 RENNES CEDEX, FRANCE

*Email address:* dominique.cerveau@univ-rennes1.fr

D. GARBA BELKO, UNIVERSITÉ ABDOU MOUMOUNI, FACULTÉ DES SCIENCES, DÉPARTEMENT DE MATHÉMA-  
TIQUES, B.P. 10662 NIAMEY, NIGER

*Email address:* garbabelkodjibrilla@yahoo.fr